

# <http://ru.calameo.com/read/005031991f1aa1395d5c5>

Автор: Негода Сергій Петрович

## 1.25 Поділ клумби на фігури

Тимко займається ландшафтним дизайном. Йому треба поділити трикутну клумбу на трапеції для розташування різних об'єктів на клумбі.

Завдання

- 1) Трикутну клумбу розділити на три трапеції, загальною вершиною яких є точка перетину медіан трикутника.
- 2) Порівняйте площі утворених трапецій.
- 3) Трикутну клумбу розділити на рівнобедрені трикутники. Яка найменша кількість утворених рівнобедрених трикутників?
- 4) Трикутну клумбу розділити на прямокутні трикутники. Яка найменша кількість утворених прямокутних трикутників?

## 1.26 Кут між діагоналями трапеції

Тимко займається ландшафтним дизайном. Клумба має форму рівнобічної трапеції. Тимко виміряв площа квадрату, побудованого на діагоналі рівнобічної трапеції, і вияснив, що вона у 4 рази більша площі трапеції.

Завдання

- 1) Чи вірно, що навколо цієї трапеції можна описати коло?
- 2) Чи вірно, що діагональ трапеції – це найбільший відрізок із усіх відрізків, кінці яких лежать на сторонах трапеції?
- 3) Чи вірно, якщо бічні сторони рівнобічної трапеції дорівнюють середній лінії

трапеції, то в цю трапецію можна вписати коло?

4) Знайдіть кут між діагоналями даної рівнобічної трапеції.

## 1.27 Властивості трапеції

Тимко займається ландшафтним дизайном. Клумба має форму рівнобічної трапеції. Тимко знайшов, що сума площ квадратів побудованих на діагоналях трапеції, у 4 рази більша площі трапеції.

Завдання

- 1) Доведіть що діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні.
- 2) Чи вірно, що середня лінія трапеції дорівнює висоті трапеції.
- 3) Чи можна цю трапецію поділити парну кількість рівнобічних трапецій?
- 4) Які кути між діагоналями і основами трапецій?
- 5) Діагоналі розрізають трапецію на чотири трикутники, які із цих трикутників мають рівні площі?
- 6) Як довести, що діагоналі рівнобічної трапеції точкою перетину діляться на однакові частини?
- 7) Як довести, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то висота дорівнює середній лінії?
- 8) Відомо, що у трапеції одна діагональ рівна сумі основ трапеції. Кут між діагоналями  $60^\circ$ . Як довести, що ця трапеція рівнобічна?
- 9) У трапеції діагоналі перпендикулярні. Як довести, що середня лінія дорівнює половині суми основ?
- 10) Середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який сполучає середини основ. Як довести, що діагоналі трапеції перпендикулярні?

## 1.28 Площа клумби

Тимко займається ландшафтним дизайном. Клумба має форму довільної трапеції. Основи трапеції  $BC$  і  $AD$ , діагоналі перетинаються в точці  $O$ . Площі трикутників  $ABO$  і  $BCO$  дорівнюють  $50$  і  $20$   $\text{cm}^2$  відповідно.

Завдання

- 1) Знайдіть площу трапеції.
- 2) Знайдіть площу усіх трикутників, які утворюються розрізанням трапеції по лініям двох діагоналей.

### 1.29 Правильний трикутник і трапеція

Федір займається ландшафтним дизайном. Його клумба має форму рівнобічної трапеції. Кут між діагоналями рівнобічної трапеції дорівнює  $60^\circ$ .

Завдання

- 1) Скільки таких трапецій може мати Федір?
- 2) Як розділити дану трапецію на якомога більше число частин, із яких можна скласти рівносторонній трикутник?

### 1.30 Прямокутні трикутники у трапеції

Тимко займається ландшафтним дизайном. Його клумба має форму рівнобічної трапеції. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні. Продовження бокових сторін  $AB$  і  $CD$  перетинаються у точці  $M$  під кутом в  $30^\circ$ .

Завдання

- 1) Знаючи що площа трикутника  $BMC$  дорівнює  $Q$ , знайдіть площу трапеції.
- 2) Як розрізати дану трапецію на прямокутні трикутники?

### 1.31 Півкруг і трапеція

Тимко займається ландшафтним дизайном. Його клумба має форму півкруга.

У півкруг з радіусом 2 см вписана трапеція, периметр якої дорівнює 10см.

Завдання

- 1) Який вид трапеції можна вписати в півкруг?
- 2) Знайдіть площу трапеції.

### 1.32 Бліц-турнір капітанів

Два капітани команд грають між собою на швидкість і кмітливість. Два капітани відповіли на усі запитання тільки однозначно і безумовно.

Завдання

Вказати питання, на які два капітани відповіли не правильно.

- 1) Двом сестричкам — Оксані та Олі — купили чотири шапочки: три голубі й одну зелену. Дівчатка одягнули нові шапочки до школи. У якій шапочці була Оля, якщо Оксана одягла зелену шапочку?
- 2) Ігор і Сергій мають прізвища Макар і Кобзар. Які прізвища у цих хлопчиків, якщо у Ігоря чорне волосся, а у Макара — русяве?
- 3) Батька вчителя звать Мирон Петрович, а його сина — Олександр Тарасович. Як звертатися до вчителя?
- 4) На полювання пішли двоє батьків і двоє синів. Вони вбили трьох зайців. Як могло трапитися, що кожний з них приніс додому зайця?

### 1.33 Швидкість ракети

Петро занявся розробкою ракетної установки. Його ракета повинна мати якого найбільшу швидкість. Петро добре вивчив властивості реактивного руху. І

почав вести розрахунки.

Завдання

- 1) З якою швидкістю ракета має вийти із поля тяжіння Землі?
- 2) З якою швидкістю ракета має подолати поле тяжіння Сонячної системи?
- 3) Визначити, при якому відношенні повної маси  $M + m$  ракети (разом з паливом), де маси  $M$ - ракети без палива,  $m$  – маса палива, можна досягти того, щоб кінцева швидкість ракети  $v$  дорівнювала швидкості  $w$  витіканн газів.

### 1.34 Світло маяка

Маяк забезпечений ліхтарем, сила світла якого дорівнює 6500 карселей (карсель- одиниця сили світла, рівна приблизно 8 свічок). Найменша помітна оком на відстані 1 км сила світла може бути оцінена приблизно в 0,01 карселя. Прозорість повітря при абсолютно ясній погоді така, що при проходженні шару повітря товщиною в 1 км зберігається 0,9 світлової енергії.

Завдання

- 1) Обчислити приблизно відстань  $r$ , на яке простягається дія маяка.

### 1.35 Дослідження кутів чотирикутника

Миколка вирішив за допомогою циркуля і лінійки дослідити властивості кутів чотирикутника. Він накреслив довільний чотирикутник, і розпочав міркувати.

Завдання

- 1) В чотирикутнику проведені діагоналі. Скільки рівних відрізків може опинитися на малюнку?
- 2) В чотирикутнику проведені діагоналі. Яке найбільше число прямих кутів може опинитися на малюнку?

3) Чи вірне твердження, що серед кутів випуклого чотирикутника завжди знайдеться хоча б один прямий або тупий кут?

4) Як побудувати чотирикутник ABCD по кутам A і B, сторонам AB, AD і сумі двох других сторін.

5) В чотирикутнику ABCD кут C – прямий. Як побудувати цей чотирикутник по довжинам сторін AB, AD, CD і величині кута A.

### 1.36 Дослідження властивостей паралелограма

Дмитро вирішив за допомогою циркуля і лінійки дослідити властивості кутів і сторін паралелограма. Він накреслив довільний паралелограм, і розпочав міркувати.

#### Завдання

1) Як створити та пояснити ознаки паралелограма, що відмінні від переглянутих в шкільному посібнику з геометрії?

2) Точка M знаходиться в середині кута, вершини якого не доступна (тобто лежить за межами доступної частини площини). Як побудувати промінь з початком M, спрямований на вершину кута?

3) Пластинку у виді паралелограма розрізали на 3 частини, кожна з яких являється рівнобедреним трикутником. Як визначити градусні міри кутів паралелограма?

4) Точка M знаходиться в середині даного кута. Як побудувати відрізок, у якому кінці лежать на сторонах даного кута, а середина – в точці M.

5) Точки A і C знаходяться в середині даного кута. Як побудувати паралелограм ABCD, у якого вершини B і D знаходяться на сторонах даного кута.

ABCD – паралелограм. За його межами побудовані квадрати ABPE і BCKM. Як довести, що відрізки ED і DK взаємно перпендикулярні?

6) Як побудувати паралелограм по положенню вершин A і B та відстанню від даної точки M до вершини C і D?

- 7) Як побудувати паралелограм ABCD, якщо дана пряма BD і основи висот, проведених з вершини B.
- 8) Дві висоти паралелограма проведені з вершини гострого кута і дорівнюють 4 та 10, а кут між ними  $120^\circ$ . Як знайти сторони паралелограма?
- 9) Більша діагональ ромба ділить його висоту, проведenu з вершини тупого кута на відрізки 75 см і 21 см. Як знайти площу ромба?
- 10) Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, втричі більший за цей кут? Як знайти кути паралелограма?
- 11) Діагоналі прямокутника поділяють його на чотири трикутники, периметри яких дорівнюють  $\frac{9}{14}$  та  $\frac{4}{7}$  периметра прямокутника. Як знайти відношення довжин сторін прямокутника?
- 12) Сума периметрів чотирьох трикутників, на які квадрат розбивається діагоналями, більша за периметр квадрата на 48 см. Як знайти діагональ квадрата?

### 1.37 Дослідження видів чотирикутників

Максим досліджує властивості чотирикутників. Для цього він вибирає довільні чотири точки і з'єднує їх відрізками. Допоможіть Максиму правильно встановити умови, для того щоб визначити вид чотирикутника.

Завдання.

- 1) Якщо в чотирикутнику всі сторони рівні, то це ...
- 2) Якщо в чотирикутнику діагоналі перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл, то це ...
- 3) Якщо в чотирикутнику три кути прямі, то це ...
- 4) Якщо в чотирикутнику діагоналі рівні і точкою перетину діляться навпіл, то це ...
- 5) Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то це ...

- 6) Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони попарно рівні, то це ...
- 7) Якщо в чотирикутнику дві діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то це ...
- 8) Якщо в чотирикутнику кожна діагональ ділить чотирикутник на два рівні трикутники, то це ...
- 9) Якщо в чотирикутника лише дві паралельні сторони, то це ...
- 10) Якщо в чотирикутника сума протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін, то це ...
- 11) Якщо в чотирикутника сума протилежних кутів дорівнює  $180^\circ$ , то це ...
- 12) Якщо в чотирикутника бісектриси будь-яких сусідніх кутів перпендикулярні, то це ...

### 1.38 Дослідження властивостей паралелограмів

Данилко досліджує деякі корисні властивості паралелограмів. Для цього він вибирає довільні пари паралельних відрізків точки і з'єднує їх. Допоможіть Данилку правильно встановити умови, для того щоб сформулювати властивість паралелограма.

Завдання.

- 1) У паралелограма бісектриси будь-яких сусідніх кутів .....
- 2) У паралелограма відрізок, який з'єднує протилежні сторони і проходить через точку перетину діагоналей, ділиться цією точкою на частини, які ...
- 3) У паралелограма кут між висотами, що проведені з вершини тупого кута, дорівнює ...
- 4) У паралелограма кут між висотами, що проведені з вершини гострого кута, дорівнює ...
- 5) У паралелограма висота, що проведені з вершини тупого кута, відрізає від



паралелограма ...

6) У паралелограма дві висоти, що проведені з вершини тупого кута, відрізають від паралелограма два трикутники, у яких ...

7) У паралелограма добуток діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін, тоді діагоналі паралелограма ...

8) У паралелограма сума протилежних кутів дорівнює  $180^\circ$ , то це ...

9) У паралелограма сума протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін, тоді його діагоналі ...

10) У паралелограма сума сусідніх кутів дорівнює ...

11) У паралелограма сума усіх кутів дорівнює ...

12) У паралелограма протилежні кути ...

### 1.39 Дослідження властивостей прямокутників

Михайло досліджує деякі корисні властивості прямокутників. Для цього він вибирає довільні пари паралельних відрізків точки і з'єднує їх. Допоможіть Михайлу правильно встановити умови, для того щоб сформулювати властивість прямокутника.

Завдання.

1) Якщо в паралелограма один кут прямий, діагоналі рівні, діагоналі утворюють рівні кути з однією стороною, то це ...

2) Якщо в паралелограма один кут прямий, діагоналі рівні, сусідні кути рівні кути, то це ...

3) Якщо в паралелограма сусідні сторони рівні, діагоналі перпендикулярні, діагоналі утворюють рівні кути з однією стороною, то це ...

4) Якщо в паралелограма один кут прямий, в нього можна вписати коло, то це ...

5) Якщо навколо паралелограма можна описати коло, то це ...

- 6) Якщо в паралелограма квадрат кожної діагоналі рівний сумі квадратів двох сторін, то це ...
- 7) Якщо діагоналі паралелограма розрізають його на нерівні між собою рівнобедрені трикутники, то це ...
- 8) Якщо діагоналі паралелограма розрізають його на рівні між собою рівнобедрені трикутники, то це ...
- 9) Якщо діагоналі прямокутника являються бісектрисами кутів, то це ...
- 10) Якщо в прямокутника квадрат кожної сторони дорівнює сумі квадратів половини діагоналей, то це ...
- 11) Якщо середні лінії паралелограма перпендикулярні до сторін, то це ...
- 12) Якщо навколо паралелограма можна описати коло, то це ...

#### **1.40 Параметри підручника**

Артемко здивувався, коли прочитав підручник з математики. Його вразила маленька товщина книги. Допоможіть Артемку вимірювати лінійкою розміри сторінок та абзаців, обчислювати середнє арифметичне величин, міркувати над завданнями.

Завдання.

- 1) Якої товщини був би підручник з математики, якби він містив 1000 сторінок?
- 2) Скільки сторінок мав би підручник з математики, якби він містив 10 000 задач?
- 3) Скільки підручників мав би курс з математики, якби він містив 100 000 параграфів?
- 4) Скільки сторінок мав би підручник з математики, якби він містив 1 000 000 друкованих символів?

## 1.41 Мрія альпініста

Арсен мріє здолати вершини десяти найвищих точок нашої планети.

Допоможіть Арсену знаходити інформацію та обчислювати середнє арифметичне величин, міркувати над завданнями.

Завдання.

- 1) Яка середня величина десяти найвищих точок нашої планети?
- 2) Скільки часу потрібно на долавання однієї вершини?
- 3) Скільки часу потрібно на підготовку до сходження на найвищу вершину?
- 4) Скільки кисню потрібно альпіністу в день, щоб не зашкодити своєму здоров'ю?
- 5) Скільки грошей потрібно альпіністу, щоб купити амуніцію та всі речі першої необхідності в горах, аби не зашкодити своєму здоров'ю?

## 1.42 Цілі рівняння

Андрійко вважає, що найкращий спосіб розв'язувати цілих рівнянь – це розклад їх лівої частини на множники, після чого кожний множник прирівнювати до нуля. Допоможіть Андрійку обчислювати та знаходити корені рівнянь, міркуючи над завданнями.

Завдання

- 1) Знайти середнє арифметичне коренів рівняння  $1/x^4 - 1/x^2 = 0$ .
- 2) Знайти найменший із коренів рівняння  $5/x^3 - 2/x^2 = 0$ .
- 3) Знайти суму коренів рівняння  $16/x^4 - 4/x^2 = 0$ .

- 4) Знайти суму квадратів рівняння  $81/x^8 - 16/x^4 = 0$ .
- 5) Знайти квадрат суми коренів рівняння  $81x^6 - 16x^2 = 0$ .
- 6) Знайти найбільший із коренів рівняння  $|1/x|^3 - 1/|x|^2 = 4$ .
- 7) Знайти найменший із коренів рівняння  $(x^2 - 6|x| + 9)^2 - (x^2 + 4|x| + 4)^2 = 0$ .
- 8) Знайти найменший із коренів рівняння  $(|x|^3 + 2x^2 - 9|x| - 18)^2 = 0$ .
- 9) Знайти найменший із коренів рівняння  $(x^2 - 2|x| + 2)^4 + (x^2 + 3|x| - 4)^2 = 0$ .
- 10) Знайти найбільший із коренів рівняння  $(x^2 - 6|x| + 5)^{12} + (x^2 + 4|x| + 5)^6 = 0$ .
- 11) Знайти добуток коренів рівняння  $(4x^2 - 11|x| + 6)^8 + (4x^2 - 5|x| - 6)^{10} = 0$ .
- 12) Розв'яжіть рівняння  $(x^2 - 3|x| - 4)^2 - 2(x^2 - 3|x| - 4)(x - 1) - 8(1 - x)^2 = 0$ .

### 1.43 Розклад на множники многочленів

Архип вважає, що усі цілі многочлени можна розкласти на множники на множині комплексних чисел. Допоможіть Архипу знаходити нулі многочленів, міркуючи над завданнями.

#### Завдання

Знайти помилку в розкладі на множники многочленів, після чого знайдіть нулі цих многочленів:

$$1) a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 + 4a^2 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2);$$

$$2) a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 + a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1);$$

$$3) a^5 + a + 1 = a^5 + a^4 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a + 1 = (a^5 + a^4 + a^3) - (a^4 + a^3 + a^2) - (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1);$$

$$4) a^{10} + a^5 + 1 = (a^{10} + a^9 + a^8) - (a^9 + a^8 + a^7) + (a^7 + a^6 + a^5) - (a^6 + a^5 + a^4) + (a^4 + a^3) - (a^3 + a^2 + a) - (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1);$$

$$5) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b + 3ab^2 =$$

$$= ((a + b)^3 + c^3) - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^2 - ab - ac - bc).$$

$$6) a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2);$$

$$7) 4a^4 + b^4 = 4a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 = (2a^2 + b^2)^2 + (2ab)^2 = (2a^2 - 2ab + b^2)(2a^2 + 2ab + b^2);$$

$$8) (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 =$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 + a^3 =$$

$$= -3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 3c^2a + 3ca^2 =$$

$$= -3ab(a - b) + 3c(a^2 - b^2) - 3c^2(a - b) =$$

$$= 3(a - b)((a + b)c - ab - c^2) = 3(a - b)(a(c - b) + c(b - c)) =$$

$$= 3(a - b)(b - c)(c - a). \square\square$$