

<http://ru.calameo.com/read/005031991f1aa1395d5c5>

Автор: Негода Сергій Петрович

1.25 Поділ клумби на фігури

Тимко займається ландшафтним дизайном. Йому треба поділити трикутну клумбу на трапеції для розташування різних об'єктів на клумбі.

Завдання

- 1) Трикутну клумбу розділити на три трапеції, загальною вершиною яких є точка перетину медіан трикутника.
- 2) Порівняйте площі утворених трапецій.
- 3) Трикутну клумбу розділити на рівнобедрені трикутники. Яка найменша кількість утворених рівнобедрених трикутників?
- 4) Трикутну клумбу розділити на прямокутні трикутники. Яка найменша кількість утворених прямокутних трикутників?

1.26 Кут між діагоналями трапеції

Тимко займається ландшафтним дизайном. Клумба має форму рівнобічної трапеції. Тимко виміряв площа квадрату, побудованого на діагоналі рівнобічної трапеції, і вияснив, що вона у 4 рази більша площі трапеції.

Завдання

- 1) Чи вірно, що навколо цієї трапеції можна описати коло?
- 2) Чи вірно, що діагональ трапеції – це найбільший відрізок із усіх відрізків, кінці яких лежать на сторонах трапеції?
- 3) Чи вірно, якщо бічні сторони рівнобічної трапеції дорівнюють середній лінії

трапеції, то в цю трапецію можна вписати коло?

4) Знайдіть кут між діагоналями даної рівнобічної трапеції.

1.27 Властивості трапеції

Тимко займається ландшафтним дизайном. Клумба має форму рівнобічної трапеції. Тимко знайшов, що сума площ квадратів побудованих на діагоналях трапеції, у 4 рази більша площі трапеції.

Завдання

- 1) Доведіть що діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні.
- 2) Чи вірно, що середня лінія трапеції дорівнює висоті трапеції.
- 3) Чи можна цю трапецію поділити парну кількість рівнобічних трапецій?
- 4) Які кути між діагоналями і основами трапецій?
- 5) Діагоналі розрізають трапецію на чотири трикутники, які із цих трикутників мають рівні площі?
- 6) Як довести, що діагоналі рівнобічної трапеції точкою перетину діляться на однакові частини?
- 7) Як довести, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то висота дорівнює середній лінії?
- 8) Відомо, що у трапеції одна діагональ рівна сумі основ трапеції. Кут між діагоналями 60° . Як довести, що ця трапеція рівнобічна?
- 9) У трапеції діагоналі перпендикулярні. Як довести, що середня лінія дорівнює половині суми основ?
- 10) Середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який сполучає середини основ. Як довести, що діагоналі трапеції перпендикулярні?

1.28 Площа клумби

Тимко займається ландшафтним дизайном. Клумба має форму довільної трапеції. Основи трапеції BC і AD , діагоналі перетинаються в точці O . Площі трикутників ABO і BCO дорівнюють 50 і 20 см^2 відповідно.

Завдання

- 1) Знайдіть площу трапеції.
- 2) Знайдіть площу усіх трикутників, які утворюються розрізанням трапеції по лініям двох діагоналей.

1.29 Правильний трикутник і трапеція

Федір займається ландшафтним дизайном. Його клумба має форму рівнобічної трапеції. Кут між діагоналями рівнобічної трапеції дорівнює 60° .

Завдання

- 1) Скільки таких трапецій може мати Федір?
- 2) Як розділити дану трапецію на якомога більше число частин, із яких можна скласти рівносторонній трикутник?

1.30 Прямокутні трикутники у трапеції

Тимко займається ландшафтним дизайном. Його клумба має форму рівнобічної трапеції. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні. Продовження бокових сторін AB і CD перетинаються у точці M під кутом в 30° .

Завдання

- 1) Знаючи що площа трикутника BMC дорівнює Q , знайдіть площу трапеції.
- 2) Як розрізати дану трапецію на прямокутні трикутники?

1.31 Півкруг і трапеція

Тимко займається ландшафтним дизайном. Його клумба має форму півкруга.

У півкруг з радіусом 2 см вписана трапеція, периметр якої дорівнює 10см.

Завдання

- 1) Який вид трапеції можна вписати в півкруг?
- 2) Знайдіть площу трапеції.

1.32 Бліц-турнір капітанів

Два капітани команд грають між собою на швидкість і кмітливість. Два капітани відповіли на усі запитання тільки однозначно і безумовно.

Завдання

Вказати питання, на які два капітани відповіли не правильно.

- 1) Двом сестричкам — Оксані та Олі — купили чотири шапочки: три голубі й одну зелену. Дівчатка одягнули нові шапочки до школи. У якій шапочці була Оля, якщо Оксана одягла зелену шапочку?
- 2) Ігор і Сергій мають прізвища Макар і Кобзар. Які прізвища у цих хлопчиків, якщо у Ігоря чорне волосся, а у Макара — русяве?
- 3) Батька вчителя звать Мирон Петрович, а його сина — Олександр Тарасович. Як звертатися до вчителя?
- 4) На полювання пішли двоє батьків і двоє синів. Вони вбили трьох зайців. Як могло трапитися, що кожний з них приніс додому зайця?

1.33 Швидкість ракети

Петро занявся розробкою ракетної установки. Його ракета повинна мати якого найбільшу швидкість. Петро добре вивчив властивості реактивного руху. І

почав вести розрахунки.

Завдання

- 1) З якою швидкістю ракета має вийти із поля тяжіння Землі?
- 2) З якою швидкістю ракета має подолати поле тяжіння Сонячної системи?
- 3) Визначити, при якому відношенні повної маси $M + m$ ракети (разом з паливом), де маси M - ракети без палива, m – маса палива, можна досягти того, щоб кінцева швидкість ракети v дорівнювала швидкості w витіканн газів.

1.34 Світло маяка

Маяк забезпечений ліхтарем, сила світла якого дорівнює 6500 карселей (карсель- одиниця сили світла, рівна приблизно 8 свічок). Найменша помітна оком на відстані 1 км сила світла може бути оцінена приблизно в 0,01 карселя. Прозорість повітря при абсолютно ясній погоді така, що при проходженні шару повітря товщиною в 1 км зберігається 0,9 світлової енергії.

Завдання

- 1) Обчислити приблизно відстань r , на яке простягається дія маяка.

1.35 Дослідження кутів чотирикутника

Миколка вирішив за допомогою циркуля і лінійки дослідити властивості кутів чотирикутника. Він накреслив довільний чотирикутник, і розпочав міркувати.

Завдання

- 1) В чотирикутнику проведені діагоналі. Скільки рівних відрізків може опинитися на малюнку?
- 2) В чотирикутнику проведені діагоналі. Яке найбільше число прямих кутів може опинитися на малюнку?

3) Чи вірне твердження, що серед кутів випуклого чотирикутника завжди знайдеться хоча б один прямий або тупий кут?

4) Як побудувати чотирикутник ABCD по кутам A і B, сторонам AB, AD і сумі двох других сторін.

5) В чотирикутнику ABCD кут C – прямий. Як побудувати цей чотирикутник по довжинам сторін AB, AD, CD і величині кута A.

1.36 Дослідження властивостей паралелограма

Дмитро вирішив за допомогою циркуля і лінійки дослідити властивості кутів і сторін паралелограма. Він накреслив довільний паралелограм, і розпочав міркувати.

Завдання

1) Як створити та пояснити ознаки паралелограма, що відмінні від переглянутих в шкільному посібнику з геометрії?

2) Точка M знаходиться в середині кута, вершини якого не доступна (тобто лежить за межами доступної частини площини). Як побудувати промінь з початком M, спрямований на вершину кута?

3) Пластинку у виді паралелограма розрізали на 3 частини, кожна з яких являється рівнобедреним трикутником. Як визначити градусні міри кутів паралелограма?

4) Точка M знаходиться в середині даного кута. Як побудувати відрізок, у якому кінці лежать на сторонах даного кута, а середина – в точці M.

5) Точки A і C знаходяться в середині даного кута. Як побудувати паралелограм ABCD, у якого вершини B і D знаходяться на сторонах даного кута.

ABCD – паралелограм. За його межами побудовані квадрати ABPE і BCKM. Як довести, що відрізки ED і DK взаємно перпендикулярні?

6) Як побудувати паралелограм по положенню вершин A і B та відстанню від даної точки M до вершини C і D?

- 7) Як побудувати паралелограм ABCD, якщо дана пряма BD і основи висот, проведених з вершини B.
- 8) Дві висоти паралелограма проведені з вершини гострого кута і дорівнюють 4 та 10, а кут між ними 120° . Як знайти сторони паралелограма?
- 9) Більша діагональ ромба ділить його висоту, проведenu з вершини тупого кута на відрізки 75 см і 21 см. Як знайти площу ромба?
- 10) Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, втричі більший за цей кут? Як знайти кути паралелограма?
- 11) Діагоналі прямокутника поділяють його на чотири трикутники, периметри яких дорівнюють $\frac{9}{14}$ та $\frac{4}{7}$ периметра прямокутника. Як знайти відношення довжин сторін прямокутника?
- 12) Сума периметрів чотирьох трикутників, на які квадрат розбивається діагоналями, більша за периметр квадрата на 48 см. Як знайти діагональ квадрата?

1.37 Дослідження видів чотирикутників

Максим досліджує властивості чотирикутників. Для цього він вибирає довільні чотири точки і з'єднує їх відрізками. Допоможіть Максиму правильно встановити умови, для того щоб визначити вид чотирикутника.

Завдання.

- 1) Якщо в чотирикутнику всі сторони рівні, то це ...
- 2) Якщо в чотирикутнику діагоналі перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл, то це ...
- 3) Якщо в чотирикутнику три кути прямі, то це ...
- 4) Якщо в чотирикутнику діагоналі рівні і точкою перетину діляться навпіл, то це ...
- 5) Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то це ...

- 6) Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони попарно рівні, то це ...
- 7) Якщо в чотирикутнику дві діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то це ...
- 8) Якщо в чотирикутнику кожна діагональ ділить чотирикутник на два рівні трикутники, то це ...
- 9) Якщо в чотирикутника лише дві паралельні сторони, то це ...
- 10) Якщо в чотирикутника сума протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін, то це ...
- 11) Якщо в чотирикутника сума протилежних кутів дорівнює 180° , то це ...
- 12) Якщо в чотирикутника бісектриси будь-яких сусідніх кутів перпендикулярні, то це ...

1.38 Дослідження властивостей паралелограмів

Данилко досліджує деякі корисні властивості паралелограмів. Для цього він вибирає довільні пари паралельних відрізків точки і з'єднує їх. Допоможіть Данилку правильно встановити умови, для того щоб сформулювати властивість паралелограма.

Завдання.

- 1) У паралелограма бісектриси будь-яких сусідніх кутів
- 2) У паралелограма відрізок, який з'єднує протилежні сторони і проходить через точку перетину діагоналей, ділиться цією точкою на частини, які ...
- 3) У паралелограма кут між висотами, що проведені з вершини тупого кута, дорівнює ...
- 4) У паралелограма кут між висотами, що проведені з вершини гострого кута, дорівнює ...
- 5) У паралелограма висота, що проведені з вершини тупого кута, відрізає від

паралелограма ...

6) У паралелограма дві висоти, що проведені з вершини тупого кута, відрізають від паралелограма два трикутники, у яких ...

7) У паралелограма добуток діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін, тоді діагоналі паралелограма ...

8) У паралелограма сума протилежних кутів дорівнює 180° , то це ...

9) У паралелограма сума протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін, тоді його діагоналі ...

10) У паралелограма сума сусідніх кутів дорівнює ...

11) У паралелограма сума усіх кутів дорівнює ...

12) У паралелограма протилежні кути ...

1.39 Дослідження властивостей прямокутників

Михайло досліджує деякі корисні властивості прямокутників. Для цього він вибирає довільні пари паралельних відрізків точки і з'єднує їх. Допоможіть Михайлу правильно встановити умови, для того щоб сформулювати властивість прямокутника.

Завдання.

1) Якщо в паралелограма один кут прямий, діагоналі рівні, діагоналі утворюють рівні кути з однією стороною, то це ...

2) Якщо в паралелограма один кут прямий, діагоналі рівні, сусідні кути рівні кути, то це ...

3) Якщо в паралелограма сусідні сторони рівні, діагоналі перпендикулярні, діагоналі утворюють рівні кути з однією стороною, то це ...

4) Якщо в паралелограма один кут прямий, в нього можна вписати коло, то це ...

5) Якщо навколо паралелограма можна описати коло, то це ...

- 6) Якщо в паралелограма квадрат кожної діагоналі рівний сумі квадратів двох сторін, то це ...
- 7) Якщо діагоналі паралелограма розрізають його на нерівні між собою рівнобедрені трикутники, то це ...
- 8) Якщо діагоналі паралелограма розрізають його на рівні між собою рівнобедрені трикутники, то це ...
- 9) Якщо діагоналі прямокутника являються бісектрисами кутів, то це ...
- 10) Якщо в прямокутника квадрат кожної сторони дорівнює сумі квадратів половини діагоналей, то це ...
- 11) Якщо середні лінії паралелограма перпендикулярні до сторін, то це ...
- 12) Якщо навколо паралелограма можна описати коло, то це ...

1.40 Параметри підручника

Артемко здивувався, коли прочитав підручник з математики. Його вразила маленька товщина книги. Допоможіть Артемку вимірювати лінійкою розміри сторінок та абзаців, обчислювати середнє арифметичне величин, міркувати над завданнями.

Завдання.

- 1) Якої товщини був би підручник з математики, якби він містив 1000 сторінок?
- 2) Скільки сторінок мав би підручник з математики, якби він містив 10 000 задач?
- 3) Скільки підручників мав би курс з математики, якби він містив 100 000 параграфів?
- 4) Скільки сторінок мав би підручник з математики, якби він містив 1 000 000 друкованих символів?

1.41 Мрія альпініста

Арсен мріє здолати вершини десяти найвищих точок нашої планети.

Допоможіть Арсену знаходити інформацію та обчислювати середнє арифметичне величин, міркувати над завданнями.

Завдання.

- 1) Яка середня величина десяти найвищих точок нашої планети?
- 2) Скільки часу потрібно на додання однієї вершини?
- 3) Скільки часу потрібно на підготовку до сходження на найвищу вершину?
- 4) Скільки кисню потрібно альпіністу в день, щоб не зашкодити своєму здоров'ю?
- 5) Скільки грошей потрібно альпіністу, щоб купити амуніцію та всі речі першої необхідності в горах, аби не зашкодити своєму здоров'ю?

1.42 Цілі рівняння

Андрійко вважає, що найкращий спосіб розв'язувати цілих рівнянь – це розклад їх лівої частини на множники, після чого кожний множник прирівнювати до нуля. Допоможіть Андрійку обчислювати та знаходити корені рівнянь, міркуючи над завданнями.

Завдання

- 1) Знайти середнє арифметичне коренів рівняння $1/x^4 - 1/x^2 = 0$.
- 2) Знайти найменший із коренів рівняння $5/x^3 - 2/x^2 = 0$.
- 3) Знайти суму коренів рівняння $16/x^4 - 4/x^2 = 0$.

- 4) Знайти суму квадратів рівняння $81/x^8 - 16/x^4 = 0$.
- 5) Знайти квадрат суми коренів рівняння $81x^6 - 16x^2 = 0$.
- 6) Знайти найбільший із коренів рівняння $|1/x|^3 - 1/|x|^2 = 4$.
- 7) Знайти найменший із коренів рівняння $(x^2 - 6|x| + 9)^2 - (x^2 + 4|x| + 4)^2 = 0$.
- 8) Знайти найменший із коренів рівняння $(|x|^3 + 2x^2 - 9|x| - 18)^2 = 0$.
- 9) Знайти найменший із коренів рівняння $(x^2 - 2|x| + 2)^4 + (x^2 + 3|x| - 4)^2 = 0$.
- 10) Знайти найбільший із коренів рівняння $(x^2 - 6|x| + 5)^{12} + (x^2 + 4|x| + 5)^6 = 0$.
- 11) Знайти добуток коренів рівняння $(4x^2 - 11|x| + 6)^8 + (4x^2 - 5|x| - 6)^{10} = 0$.
- 12) Розв'яжіть рівняння $(x^2 - 3|x| - 4)^2 - 2(x^2 - 3|x| - 4)(x - 1) - 8(1 - x)^2 = 0$.

1.43 Розклад на множники многочленів

Архип вважає, що усі цілі многочлени можна розкласти на множники на множині комплексних чисел. Допоможіть Архипу знаходити нулі многочленів, міркуючи над завданнями.

Завдання

Знайти помилку в розкладі на множники многочленів, після чого знайдіть нулі цих многочленів:

$$1) a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 + 4a^2 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2);$$

$$2) a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 + a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1);$$

$$3) a^5 + a + 1 = a^5 + a^4 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a + 1 = (a^5 + a^4 + a^3) - (a^4 + a^3 + a^2) - (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1);$$

$$4) a^{10} + a^5 + 1 = (a^{10} + a^9 + a^8) - (a^9 + a^8 + a^7) + (a^7 + a^6 + a^5) - (a^6 + a^5 + a^4) + (a^4 + a^3) - (a^3 + a^2 + a) - (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1);$$

$$5) \mathbf{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b + 3ab^2 =$$

$$= ((a + b)^3 + c^3) - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^2 - ab - ac - bc).$$

$$6) \mathbf{a^4 + 4b^4} = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2);$$

$$7) \mathbf{4a^4 + b^4} = 4a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 = (2a^2 + b^2)^2 + (2ab)^2 = (2a^2 - 2ab + b^2)(2a^2 + 2ab + b^2);$$

$$8) \mathbf{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3} =$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 + a^3 =$$

$$= -3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 3c^2a + 3ca^2 =$$

$$= -3ab(a - b) + 3c(a^2 - b^2) - 3c^2(a - b) =$$

$$= 3(a - b)((a + b)c - ab - c^2) = 3(a - b)(a(c - b) + c(b - c)) =$$

$$= 3(a - b)(b - c)(c - a). \square\square$$