

# 100 завдань для розвитку компетенцій

Автор: Негода Сергій Петрович

□

□

<b>Зміст</b>			
<b>Клас</b>	<b>Номер завдання</b>	<b>Тематика завдань</b>	<b>Сторінка</b>
		Передмова	2
7-9	1.1	Туристичне містечко «Квадрат»	4
7-9	1.2	Прибутки та доходи фірми	5
7-9	1.3	Транспортна мережа	7
7-9	1.4	Властивості перехрестя шляхів	9
7-9	1.5	Комп'ютерна гра	10
7-9	1.6	Лінійна залежність і прогресія	11
7-9	1.7	Калькулятор для обчислення площ	13
7-9	1.8	Властивості маятника	15
7-9	1.9	Салют на честь Дня Незалежності	18
7-9	1.10	Обід на трьох осіб	19
7-9	1.11	Конструктор ЛЕГО на трьох	20
7-9	1.12	Розподіл молока між двома бідонами	20
7-9	1.13	Розподіл винагород між призерами	21
7-9	1.14	Задача державного казначея	21
7-9	1.15	Задача про діамантового магната	22
7-9	1.16	Задача про соціальний банк	23
7-9	1.17	Задача про народних депутатів	23
7-9	1.18	Задача про зарплати	24
7-9	1.19	На судовому засіданні	24
7-9	1.20	Задача про сім'ю	25
7-9	1.21	Спадщина батька	25
7-9	1.22	Задача прораба	26
7-9	1.23	Коливання цін на ринку	26
7-9	1.24	Найбільша площа фазенди	26
7-9	1.25	Поділ клумби на фігури	27
7-9	1.26	Кут між діагоналями трапеції	27
7-9	1.27	Властивості трапеції	27

7-9	1.28	Площа клумби	28
7-9	1.29	Правильний трикутник і трапеція	28
7-9	1.30	Прямокутні трикутники у трапеції	28
7-9	1.31	Півкруг і трапеція	28
7-9	1.32	Бліц-турнір капітанів	29
7-9	1.33	Швидкість ракети	29
7-9	1.34	Світло маяка	29
7-9	1.35	Дослідження кутів чотирикутника	29
7-9	1.36	Дослідження паралелограма	30
7-9	1.37	Дослідження видів чотирикутників	31
7-9	1.38	Дослідження властивостей паралелограмів	2
7-9	1.39	Дослідження прямокутників	31
7-9	1.40	Параметри підручника	32
7-9	1.41	Мрія альпініста	33
7-9	1.42	Цілі рівняння	33
7-9	1.43	Розклад на множники многочленів	33
7-9	1.44	Перевірка тотожності	34
7-9	1.45	Перевірка добутків	35
7-9	1.46	Перевірка многочленів на парність	35
7-9	1.47	Властивості квадратного тричлена	35
7-9	1.48	Дослідження подільності чисел	36
7-9	1.49	Дослідження періодичних дробів	37
7-9	1.50	Сумування натуральних рядів	38
7-9	1.51	Користувачі і провайдери	40
7-9	1.52	Маленький садок	41
7-9	1.53	Задачі завгоспа	41
7-9	1.54	Задачі кмітливого діда	42
7-9	1.55	Задачі економіста	43
7-9	1.56	Задачі гімназиста	45
7-9	1.57	Задачі юного математика	45
7-9	1.58	Розфарбування куба	46
7-9	1.59	Фігури на кубі	47
7-9	1.60	Правильні фігури	47
7-9	1.61	Центральна симетрія у просторі	48
7-9	1.62	Симетрія відносно площини у просторі	49
7-9	1.63	Самосиметричні фігури	51
7-9	1.64	Клітинкові фігури	52
7-9	1.65	Розгортка куба	54
7-9	1.66	Основні характеристики $n$ -кутників	55
7-9	1.67	Зведення до квадратів	57
7-9	1.68	Унікальні тотожності	58
7-9	1.69	Математичний дивертисмент	59
7-9	1.70	Властивості натуральних чисел	59

7-9	1.71	Властивості НСК( $m, n$ ) та НСД( $a, b$ )	60
7-9	1.72	Властивості НСД( $a, b$ )	62
7-9	1.73	Розклад числа на множники	64
7-9	1.74	Розклад числа на суму доданків	65
7-9	1.75	Властивості арифметичних дій	66
7-9	1.76	Розклад числа на прості множники	67
7-9	1.77	Створення квадратів	69
7-9	1.78	Задачі про лицарів та шахраїв	70
7-9	1.79	Магічні числа	71
7-9	1.80	Числові задачі	73
7-9	1.81	Властивості сум	74
7-9	1.82	Розфарбування у два кольори	74
7-9	1.83	Закони послідовностей чисел	75
7-9	1.84	Магічні числові фігури	76
7-9	1.85	Числові стрічки	77
7-9	1.86	Відношення порядку	80
7-9	1.87	Алгоритм художника	83
10-11	1.88	Періодичні функції	85
10-11	1.89	Оптимальні розміри фігур	85
10-11	1.90	Нерівності для експоненти	88
10-11	1.91	Кількість $n$ -цифрових розв'язків	89
10-11	1.92	Нерівності для рядів чисел	89
10-11	1.93	Відношення у трикутнику	90
10-11	1.94	Властивості кола	90
10-11	1.95	Оцінювання виразів	90
10-11	1.96	Степені і нерівності	92
10-11	1.97	Точні квадрати	93
10-11	1.98	Спосіб занулення частини рівняння	93
10-11	1.99	Від рівняння до функцій	94
10-11	1.100	Дивні рівняння	95

У цій книзі розглядається 100 завдань з математики для учнів середніх загальноосвітніх закладів для розвитку предметних компетенцій з алгебри та початків аналізу, геометрії, олімпіадної математики, популярної математики. У цьому збірнику завдання згруповані у такі собі навчальні-комплекси-модулі. Тематична палітра завдань стосується різних способів та сфер використання предметних компетенцій з математики в суспільстві. Автор пропонує читачам «побачити» живу задачу крізь практичну призму нашого життя. Якщо читач побажає шукати оптимальні способи розв'язання поставлених завдань, то автор буде вважати, що його місія виконана.

**математики. Підручник-посібник. Вінниця - 2017. 100 ст. з ілюстр.**

**©Негода С.П., 2017**

**Передмова**

Саме по собі життя нічого не значить, ціна його залежить від його застосування.

Ларошфуко

Шановний читач! Цей збірник компетентнісних завдань з математики для учнів базується на якісних перевагах перед традиційними формами осмислення інформації. Головною одиницею тематичної структури даного збірника є компетентнісне завдання. Не змінюючи звичайну процедуру застосування знань при вивченні тематичного модуля знань з математики, автор знайшов необхідність включити до системи завдань досвід практичного використання знань. Це викликає істотну зацікавленість та неабияку мотивацію розвивати персональний досвід, знання, кмітливість. Кожне завдання орієнтується не тільки (і не стільки) на якісні і кількісні характеристики деякого інформаційного об'єкту, які не обмежуються тільки навчальним впливом, а орієнтує на вибір стратегічного мислення в цілому. Кожна компетентнісна задача – це практична задача пов'язана з тим, що використання її результатів може створити стратегічну перевагу для подальшого розвитку ідей. А широко доступна навчальна ідея найчастіше не має обмежень у використанні і може виявитися джерелом стратегічної переваги перед проблемами подальшого навчання.

Автор пропонує у цих задачах лише ідею заради підтримки розвитку предметних компетенцій в учнів з математики, в навчальному процесі у школі - ліцеї № 7, тому читач має право обирати, а не тільки пропонувати власні варіанти відповідей на наступні питання:

1. Чи є підстави для пошуків різних точок зору на практичне використання компетентнісної задачі, чи достатньо отримати досвід та знання?
2. Чи існує взагалі необхідність у створенні саме такої компетенції?

3. Яка є необхідність у заміні традиційного погляду на проблему варіативного вирішення іншим однозначно-програмованим способом?
4. Чи є будь-яка нова компетенція органічним продовженням попередньо набутої в ряді розвитку професійних здібностей?
5. У якому стані компетенція взагалі здійснює генерацію нового мислення або як одержати результати такого мислення?
6. Чи зможе набута компетенція подати нову точку зору на відомі об'єкти?
7. Чи заповнює отриманий досвід яку-небудь нішу у персональних інтересах?
8. Чи можна охарактеризувати кожную набуту компетенцію як прогресивний чи як ретро введення в досвід учня?
9. Чи здійснював хто-небудь раніше подібні ідеї, якщо так, то наскільки успішно?
10. Як можуть виникати нові ідеї на фундаменті набутих компетенцій?
11. З якими ризиками пов'язані ідеї набуття системних компетенцій?
12. Чи може ідея набуття нової компетенції рекламувати успіх попередніх?
13. На який напрям краще зорієнтувати ідеї предметних компетенцій з математики?
14. Чи відповідає ідея предметної компетенції класичній структурі математики?
15. Які реальні шанси на запам'ятовування мала би реалізація ідеї практичного втілення отриманого досвіду у вигляді проектів?

## **100 завдань для розвитку предметних компетенцій з математики**

Люди, що засвоїли великі принципи  
математики, мають на один орган  
чуття більше, ніж прості смертні.

*Ч. Дарвін*

## 1. 1 Туристичне містечко «Квадрат»

Уявіть собі, що вам дали можливість дослідити унікальні можливості туристичних об'єктів по містечку «КВАДРАТ», котре наочно показано на малюнку у вигляді клітинок квадрату  $3 \times 3$ . У містечку «КВАДРАТ» всього є 9 різних туристичних послуг. У кожній клітинці є лише один туристичний об'єкт. Вартість 9 різних туристичних послуг (у гривнях) записана в клітинках квадратної таблиці по кожному об'єкту з цієї клітинки - це довільний магічний квадрат розміром  $3 \times 3$ . Пропоную вам скласти магічний квадрат  $3 \times 3$  самостійно із простих чисел і користуватися ним для виконання наступних завдань. Або, наприклад, використати метод терас для побудови класичного магічного квадрата  $3 \times 3$ .

Завдання:

- 1) Складіть декілька туристичних маршрутів відвідування об'єктів. Зрозуміло, що користування туристичними послугами ведуть до фінансових витрат, тому сума витрат туриста не повинна перевищувати 111 грн. Скільки туристичних маршрутів, вартість яких дорівнює рівно 111 грн?
- 2) Складіть траєкторію маршруту, який складається з 3 туристичних об'єктів міста «Квадрат» і має найбільшу вартість туристичних послуг.
- 3) Складіть траєкторію маршруту, який складається з 3 туристичних об'єктів міста «Квадрат» і має найменшу вартість туристичних послуг.
- 4) Складіть траєкторію маршруту, який складається з 5 туристичних об'єктів міста «Квадрат» і має найменшу вартість послуг.
- 5) Усі 9 туристичних послуг поділіть за деякою кількісною ознакою на дві різні групи А, В, кожна з яких містить довільну кількість послуг. Чи можна вибрати іншу кількісну ознаку для утворення таких двох груп?
- 6) Усі 9 туристичних послуг поділіть за деякою кількісною ознакою на три різні групи А, В, С, кожна з яких містить лише три різні послуги. Чи можна вибрати іншу кількісну ознаку для утворення таких трьох груп?
- 7) Виокреміть із 9 туристичних послуг таку послугу, вартість якої не можна порівнювати поділити між трьома туристами цілими частинами.

Скільки таких туристичних послуг?

- 8) Поясніть власну точку зору, чому саме так спроектовано розташування усіх 9 послуг у місті «Квадрат».
- 9) Поясніть власну точку зору, чому серед 9 послуг у місті «Квадрат» існує туристична послуга, вартість якої дорівнює 1 грн.
- 10) Як можна змінювати розташування 9 послуг у місті «Квадрат», аби зберегти умову магічності на сумах(сума по рядках, по стовбцях, по діагоналях дорівнює 111)?
- 11) Яке математичне перетворення треба здійснити над усіма вартостями послуг у місті «Квадрат», аби не виконувалася умова магічності на сумах, а виконувалася умова магічності на добутках (добутки чисел по рядках, по стовбцях, по діагоналях дорівнює 12321).
- 12) Муніципалітет міста вирішив виділити кошти на побудову нового туристичного містечка «Трикутник», тому вам треба розташувати 9 туристичних послуг різної вартості (1 грн, 2 грн, 3 грн, ..., 7 грн, 8 грн, 9 грн) на сторонах магічного трикутника (сума чисел(вартість послуг) по сторонах трикутника повинна бути однаковою). Запропонуйте декілька можливих варіантів такого містечка.

## 1.2 Прибутки та доходи фірми

Уявіть собі, що вам дали можливість дослідити прибутки та доходи корпорації АВМ, яка торгує персональними комп'ютерами і має виручку від продажу товарів на суму 700 000 грн, собівартість проданого товару становить 70% від виручки. У корпорації АВМ були також інші витрати: на збут – 60 000 грн, адміністративні витрати – 18 000 грн, відсотки за кредит – 12 000 грн, амортизаційні відрахування – 17 000 грн. Крім цього компанія одержала капітальний дохід на суму 70 000 грн від продажу старого обладнання та одержала дивідендний дохід 60 000 грн.

Корпорація АВМ сплачує податки на такі три основні види доходів:

- **звичайний дохід,**
- **капітальний дохід,**
- **дивідендний дохід.**

Податок на звичайний дохід сплачуються як відрахування від виручки таких сум, що складають:

- **собівартість** продажних товарів(включаючи заробітню платню, матеріали, накладні витрати);
- **витрати на збут;**
- **адміністративні витрати;**
- **витрати на комунальні послуги;**
- **відсотки за кредит;**
- **амортизаційні послуги.**

Зверніть увагу на те, що податки визначаються граничними ставками, тобто корпорація сплачує із звичайного доходу:

15% від перших 25 000 грн(0-25000 грн), що дорівнює  $0,15 \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 3700$  грн;

18% від других 25000 грн(250000-50000 грн) , що дорівнює 4500 грн;

30% від третіх 25 000 грн(500000-75000 грн) , що дорівнює 7500 грн;

40% від четвертих 25 000 грн(750000-100000 грн) , що дорівнює 10000 грн;

46% від п'ятих 25 000 грн(100000- A грн) , що дорівнює  $0,46 \cdot (A - 10^5)$  грн.

Капітальний дохід – це дохід від продажу активів, але не раніше, ніж через 6 місяців після їх придбання. Капітальний дохід можна отримати від перепродажу землі, майна, що здається в оренду, від продажу акцій та облігацій. Податкові ставки на капітальний дохід відрізняються від ставок на звичайний дохід. Корпорація має право вибору: плати 28% з капітального доходу, чи сплатити податки за звичайними ставками із суми капітального та звичайного доходу.

Дивідендний дохід – це дохід від акцій інших корпорацій, у вигляді дивідендів. Корпорація АВМ звільняється від сплати 85% дивідендного доходу корпорації. Іншими слова, корпорація сплачує податки лише з 15% цих доходів за ставкою 46%.



## Завдання

- 1) Знайдіть собівартість проданих товарів корпорацією АВМ.
- 2) Знайдіть відсоток витрат на збут від виручки корпорації АВМ.
- 3) Знайдіть відсоток адміністративних витрат від витрат на збут корпорації АВМ.
- 4) Знайдіть відсоток сплати за кредит від адміністративних витрат корпорації АВМ.
- 5) Знайдіть відсоток сплати за амортизаційні відрахування від оплати за кредит корпорації АВМ.
- 6) Знайдіть відсоток сплати за кредит від адміністративних витрат корпорації АВМ.
- 7) Знайдіть звичайний дохід у гривнях.
- 8) Знайдіть відсоток усіх витрат від звичайного доходу.
- 9) Побудуйте гістограму витрат від звичайного доходу.
- 10) Запропонуйте Раді директорів Корпорації АВМ, як можна понизити витрати?
- 11) Запропонуйте фінансовому відділу Корпорації АВМ, як слід змінювати у формулі значення цін:

КУПІВЕЛЬНА ЦІНА - ЛІКВІДАЦІЙНА ЦІНА

РІЧНА АМОРТИЗАЦІЯ = .....

ТЕРМІН СЛУЖБИ

для зменшення витрат на річну амортизацію.

12. Запропонуйте фінансовому відділу Корпорації АВМ, за яким правилом слід нарахувати податок на капітальний дохід, що мати кращий зиск.

### 1.3 Транспортна мережа

Уявіть собі, що вам дали можливість дослідити властивості транспортної мережі міста «Квадрат», що має 9 районів, які зображені вигляді клітинок у таблиці розміром 3x3 з назвою «ТРАНСПОРТНА ТАБЛИЦЯ». Число у клітинці таблиці означає кількість хвилин, яка необхідна мешканцю міста цього району, щоб дістатися із свого району до центрального майдану міста громадським транспортом.

## Завдання

1. Поділити усі райони міста «Квадрат» на три групи за такими ознаками:
  - Час проїзду до центру міста менше середнього;
  - Час проїзду до центру міста дорівнює середньому;
  - Час проїзду до центру місту більше середнього.
2. Знайти відстань в кілометрах від найвіддаленішого району до центру міста, якщо середня швидкість громадського транспорту на маршруті дорівнює 5 м/с.
3. Знайти відстань в кілометрах від найближчого району до центру міста, якщо середня швидкість громадського транспорту на маршруті дорівнює 5 м/с.
4. Знайти середню кількість транспортних засобів на дорогах у місті у робочий день, якщо у будь-якому районі він дорівнює добутку усіх чисел, що стоять у стовпчику «ТРАНСПОРТНОЇ ТАБЛИЦІ», в якому знаходиться район.
5. Знайти оплату (в копійках) за одноразове користування засобом громадського транспорту у місті «КВАДРАТ», якщо для мешканця у будь-якому районі він дорівнює добутку усіх чисел, що стоять у рядку «ТРАНСПОРТНОЇ ТАБЛИЦІ», в якому знаходиться район, де проживає цей мешканець.
6. Знайти кількість мешканців (у тис. одиниць) міста «КВАДРАТ», якщо для будь-якого району кількість мешканців дорівнює сумі усіх чисел, що стоять у сусідніх клітинках «ТРАНСПОРТНОЇ ТАБЛИЦІ», без клітинки, в якому знаходиться район.
7. Знайти загальні витрати усіх мешканців (тис. грн) міста «КВАДРАТ» на день за користування громадським транспортом, якщо щодня тільки кожний третій мешканець міста користується двома платними видами громадського транспорту, а для будь-якого району «ТРАНСПОРТНОЇ ТАБЛИЦІ» немає пільг в оплаті.
8. Знайти одноденні фінансові затрати усіх мешканців (тис. грн) міста

«КВАДРАТ» за користування громадським транспортом, якщо щодня лише кожний третій мешканець міста користується двічі платними видами громадського транспорту, і для будь-якого мешканця немає пільг в оплаті.

9. У місто «Квадрат» у робочий день приїздить 12 тис громадян, а виїздить щодня 11 тис. громадян. Чи можна стверджувати, що середня кількість мешканців у робочий день у місті перевищує 2 млн. громадян?

10. У кожному районі міста «КВАДРАТ» відведені місця для вільної торгівлі. Кожна клітинка «ТРАНСПОРТНОЇ ТАБЛИЦІ» містить число, яке вказує на щоденний ринковий податок у бюджет міста(у гривнях) за використане одне торговельне місце в даному районі. Лише 5 % мешканців міста користуються щодня торговельними місцями на вільних ринках. Яка виручка щодня потрапляє у бюджет міста з торговельного збору?

11. У кожному районі міста «КВАДРАТ» є місця для вільного доступу до глобальної мережі ІНТЕРНЕТ . Кожна клітинка «ТРАНСПОРТНОЇ ТАБЛИЦІ» містить число, яке вказує оплату (у копійках) за використане одне з'єднання з Інтернетом в даному районі. Лише 25% мешканців міста користуються щодня місцями вільного доступу до глобальної мережі ІНТЕРНЕТ. Яка сума щодня витрачається із бюджету міста за цю послугу?

12. Муніципалітет міста «Квадрат» виділив 7 млн . грн на освітлення доріг міста за допомогою сонячної батареї. Собівартість підключення однієї сонячної батареї в освітлювальну мережу міста дорівнює 7 тис грн. Запропонуйте НАЙКРАЩУ схему розташування сонячних батарей у районах міста «КВАДРАТ».