

# Правильний трикутник і квадрат

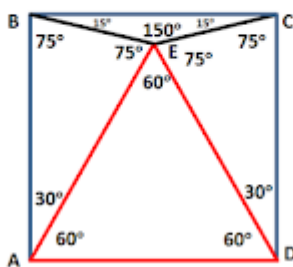
Автор: Негода Сергій Петрович

## Квадрат і рівносторонній трикутник

Дослідження взаємного розташування  
двох правильних багатокутників  
для шанувальників гармоній

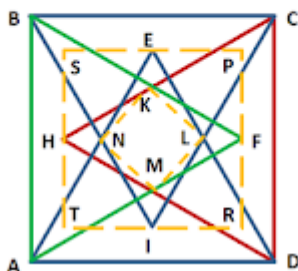
### Правильний трикутник у квадраті

На одній стороні квадрата  
побудовано правильний трикутник.  
Знайти відношення площ  
квадрата і рівностороннього трикутника.



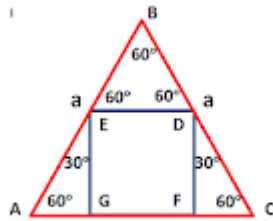
### Правильні трикутники у квадраті

На кожній стороні квадрата  
побудовано правильний трикутник.  
Знайти відношення площ двох  
жовтих квадратів PRST, KLMN.



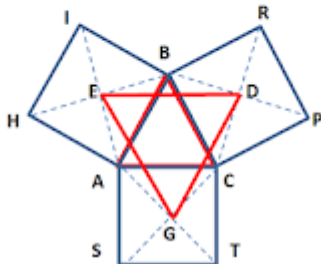
## У правильний трикутник вписано квадрат

Квадрат найбільшої площі вирізали із правильного трикутника. Знайти відношення площ квадрата і рівностороннього трикутника.



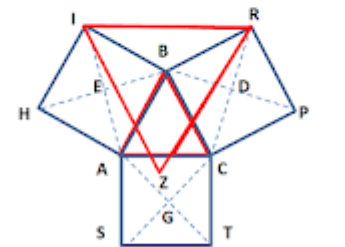
## На сторонах правильного трикутника побудовано три квадрати

Квадрати побудовано зовні на сторонах правильного трикутника. Знайти відношення площ двох рівносторонніх трикутників.



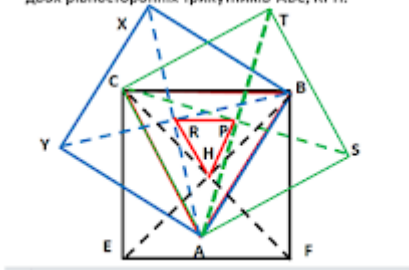
## На сторонах правильного трикутника побудовано три квадрати

Квадрати побудовано зовні на сторонах правильного трикутника. Знайти відношення площ двох рівносторонніх трикутників ABC, RIZ.



## На сторонах правильного трикутника побудовано три квадрати

Три квадрати побудовано у внутрішню область на сторонах правильного трикутника.  
Знайти відношення площ двох рівносторонніх трикутників  $ABC, RPH$ .



□□□□□□

## Компетентнісні задачі на прямокутному трикутнику

1. 1. а.Визначити гострі кути прямокутного трикутника, кути якого складають арифметичну прогресію. б.Скільки існує таких прямокутних трикутників? с.Дослідити, чи можна створити не прямокутний трикутник, кути якого складають арифметичну прогресію? d.Дослідити, чи можна створити прямокутний трикутник, кути якого складають арифметичну прогресію та сторони якого складають арифметичну прогресію?
2. 2. Визначити гострі кути прямокутного трикутника, кути якого складають геометричну прогресію. Дослідити, чи можна створити не прямокутний трикутник, кути якого складають геометричну прогресію? Дослідити, чи можна створити прямокутний трикутник, кути якого складають геометричну прогресію та сторони якого складають геометричну прогресію?
3. 3. В прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює  $c$  і в три рази більше висоти, проведеної з вершини прямого кута. Знайти катети та гострі кути.
4. 4. В прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює  $c$  і більше одного з катетів на третю частину іншого. Знайти кути та площу трикутника.
5. 5. В прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює  $a$ , а бісектриса одного з гострих кутів  $a/3^{0.5}$ . Знайти катети.
6. 6. В прямокутному трикутнику катети дорівнюють  $3a$  і  $4a$ . Знайти бісектриси гострих кутів.
7. 7. В прямокутному трикутнику катети дорівнюють  $3a$  і  $4a$ . Знайти медіани трикутника.
8. 8. На гіпотенузі прямокутного трикутника, поза ним, побудовано квадрат. Визначити відстань від вершини прямого кута до центра квадрата, знаючи, що сума катетів дорівнює  $l$ .
9. 9. В прямокутному трикутнику з катетами  $a$  і  $b$  знайти довжину бісектриси прямого кута.
10. 10. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює  $R$ , а один з гострих кутів  $\alpha$ . Знайти радіус вписаного кола.
11. 11. В прямокутному трикутнику відношення катетів дорівнює  $k$ , а радіус вписаного кола  $r$ . Знайти радіус описаного кола.
12. 12. Довести, що трикутник зі сторонами  $65/9$ ,  $7$  і  $16/9$  прямокутний, причому його площа, збільшена на один з катетів, є кубом, а периметр є квадратом цілого числа.
13. 13. Довести, що  $629/50$ ,  $621/50$  і  $2$  є сторонами прямокутного трикутника, причому його площа, збільшена на гіпотенузу, є квадратом, а периметр є кубом цілого числа.
14. 14. Знайти довжину сторони квадрата, вписаного в рівнобедрений трикутник основою  $a$  і бічною стороною  $b$  так, що дві його вершини лежать на основі трикутника, а дві інших -

на бічних його сторонах.

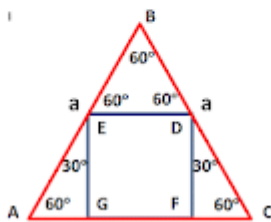
15. 15. Знайти довжину сторони квадрата, вписаного в прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$  так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві інших – на катетах.
16. 16. В прямокутнику сума сторін діагоналей і однієї сторони дорівнює  $l$ , а сума довжин діагоналей та іншої сторони дорівнює  $r$  ( $r < l$ ). Знайти площу прямокутника..

[http://fakul-maht10kl.blogspot.com/2014/09/10\\_6.html](http://fakul-maht10kl.blogspot.com/2014/09/10_6.html)

Знайти сторону вписаного квадрата в рівносторонній трикутник з стороною  $a = (2 \cdot 3^{0,5} + 3)$  см.

### У правильний трикутник вписано квадрат

Квадрат найбільшої площі вирізали із правильного трикутника. Знайти відношення площ квадрата і рівностороннього трикутника.



□

Розв'язання.

Нехай  $ABC$  – правильний трикутник з стороною  $a$ , та  $KLMN$  – вписаний квадрат в трикутник  $ABC$ . До речі, використовуючи гомотетію вписаних квадратів в правильний трикутник можна побудувати три рівні квадрати, які задовольняють умову.

Нехай сторона вписаного квадрата рівна  $z$ , тоді в прямокутному трикутнику  $LBM$ :

$$\angle M = 90^\circ, \angle L = 30^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

згідно його властивостей

$$LB = a - z, LM = z, MB = 0,5(a - z).$$

За теоремою Піфагора складаємо рівняння:

$$(a - z)^2 = z^2 + 0,25(a - z)^2.$$

Знайдемо невідоме  $z$  з квадратного рівняння:

$$z^2 + 6az^2 + 3a^2 = 0$$

$$z_1 = (-2 \cdot 3^{0.5} - 3)a \text{ (не задовольняє умові задачі)}$$

$$z_2 = (2 \cdot 3^{0.5} - 3)a$$

Отже, сторона квадрата:

$$CL = CK = KL = LM = MN = KM = z = (2 \cdot 3^{0.5} - 3)a,$$

Гіпотенуза та менший катет прямокутного LBM:

$$NA = MB = (2 - 3^{0.5})a,$$

$$KA = LB = (4 - 2 \cdot 3^{0.5})a,$$

Відповідь:  $(2 \cdot 3^{0.5} - 3)a$  одиниць довжини. Тобто 3 см. □□

### Компетентнісні задачі на властивості кола.

Максим за допомогою циркуля та лінійки досліджує властивості кіл.

□

1. У колі з радіусом  $R$  вписаний рівнобедрений прямокутний трикутник. На дузі, що стягується одним із катетів, знайти точку, для якої відношення відстаней до двох ближчих вершин є задана величина  $k$ .
2. У колі з радіусом  $R$  вписаний рівносторонній трикутник. Знайти на колі точку, для якої сума відстаней до двох ближчих вершин є задана величина  $L$ .
3. У колі з радіусом  $R$  вписаний рівносторонній трикутник. Визначити суму відстаней від даної точки на колі до двох ближчих вершин трикутника, якщо відомо, що хорда, з'єднуючи цю точку з третьою вершиною трикутника, утворює кут  $\alpha$  з діаметром, проведеним із третьої вершини ( $0 \leq \alpha < \pi/6$ ).

4. У колі вписаний рівнобедрений прямокутний трикутник. Відношення відстаней від даної точки на дузі, що стягуються одним із катетів, до двох ближніх вершин трикутника, що дорівнює  $k$ . Знайти відношення цих відстаней до відстаней даної точки до третьої вершини трикутника.
5. Три кола – один із радіусом  $r$  і два інших із радіусом  $3r/2$  – розташовані на площині так, що кожен з двох дотикається один до одного зовнішнім чином (мають тільки одну спільну точку). Визначити радіус кола, в який вписана дана система кіл.
6. Три кола – один із радіусом  $R$  і два інших з радіусом  $4R$  – розташовані на площині так, що кожен два із них дотикаються один до одного зовнішнім чином (мають тільки одну спільну точку). Визначити радіус кола, що дотикається зовнішнім чином кожного із трьох кіл.
7. Прямокутний сектор із радіусом  $R$  розділений на дві частини дугою іншого кола з таким же радіусом із центром в одному кінці дуги сектору. Визначити радіус кола, вписаного в більшу з цих частин.
8. На відрізку з двох його половин, як на діаметрах, побудовані півкола так, що два менших півкола знаходяться в більшому. По радіусу  $R$  кола, що дотикається до всіх трьох півкіл, визначити довжину відрізка.
9. Коло з радіусом  $R$  дотикається зовнішнім чином до трьох рівних кіл, кожен з яких дотикається до двох інших. Визначити радіус цих кіл.
10. У коло з радіусом  $R$  вписані три рівних кола, що дотикаються один до одного. Визначити радіус цих кіл.
11. У колі через середину хорди довжиною  $a$ , проведена хорда довжиною  $b$ . Визначити довжину відрізків, на яких хорда  $b$  ділиться хордою  $a$ .
12. Відстань точки, що лежить всередині кола з радіусом  $R$ , від його центру дорівнює  $d$ . Визначити довжину хорди, що проведена через цю точку, якщо хорда ділиться останньою у відношенні 2:3.
13. Два кола з радіусами  $r$  і  $R$  дотикаються зовнішнім чином. Визначити радіус кола, що дотикається обох заданих кіл і відсікає від їх внутрішньої дотичної хорду довжиною  $l$ .
14. Два кола з радіусами  $r$  і  $R$  дотикаються один до одного зовнішнім чином. Знайти радіус кола, який дотикається до обох даних кіл і їх спільної зовнішньої дотичної.
15. У кут  $\alpha$  вписані два кола, що дотикаються один до одного. Знайти відношення радіусів цих кіл.
16. У паралелограмі даний гострий кут  $\alpha$  і відстань  $m$  і  $p$  від точки перетину діагоналей до нерівних сторін. Знайти площу паралелограма.
17. Зобразити на площині множину точок  $M(x, y)$ , для яких  $\frac{1}{2}x + y^{\frac{1}{2}} \leq 2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 2(1+x+y)$ , вчислити його площу
18. Зобразити на площині множину точок  $M(x, y)$ , для яких  $\frac{1}{2}x + y^{\frac{1}{2}} \leq 3$ ,  $x^2 + y^2 \leq 2(2-x+2y)$ , вчислити його площу