

# Компетентнісні задачі з геометрії куба

Автор: Негода Сергій Петрович

□

## БАНК ЗАДАЧ КУРСУ «ГЕОМЕТРІЯ КУБА»

### Група А

1. Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 2 одиниць довжини. Знайти:

- 1) діагональ бічної грані; 2) діагональ куба; 3) відстань між мимобіжними діагоналю бічної грані та ребром куба; 4) відстань між мимобіжними діагоналями бічних граней куба; 5) відстань між діагоналю куба та ребром куба; 6) відстань між мимобіжними гранями куба. 7) відстань між паралельними діагоналями граней куба.

2. Знайти кут між мимобіжними діагоналями сусідніх граней куба.

3. Знайти площу шестикутника, що утворений серединами ребер куба.

4. Діагональ куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 4 одиниці довжини. Знайти:

- а) площі усіх діагональних перерізів; б) площу бічної поверхні; в) площу повної поверхні; г) діагональ; д) кут між двома мимобіжними ребрами; е) довжини усіх діагоналей основи; є) довжини усіх діагоналей бічної грані; ж) кут між двома діагоналями однієї основи; з) кут між двома діагоналями однієї бічної грані; и) кут між двома діагоналями двох бічних граней; і) кут між бічним ребром і діагоналю однієї бічної грані; ї) кут між двома мимобіжними діагоналями двох суміжних граней; к) кут між двома мимобіжними діагоналями двох несуміжних граней; л) кут між діагоналю паралелепіпеда і площиною основи; м) кут між діагоналю паралелепіпеда і бічним ребром; н) кут між діагоналю паралелепіпеда і мимобіжною діагоналю грані. о) найкоротшу відстань між двома паралельними ребрами основи; п) відстань між двома мимобіжними ребрами несуміжних граней; р) найкоротшу відстань між двома паралельними ребрами несуміжних граней; с) найкоротша відстань між двома непаралельними і немимобіжними ребрами; т) кут між двома мимобіжними ребрами; у) кут між двома суміжними ребрами основи; ф) найкоротшу відстань між діагоналю куба і мимобіжною до неї діагоналю основи; х) найкоротшу відстань між мимобіжними діагоналями несуміжних (паралельних) граней; ц) найкоротшу відстань між двома мимобіжними діагоналями суміжних (перпендикулярних) граней.

5. Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 8. Знайти:

- а) площі усіх діагональних перерізів;  
б) площу бічної поверхні;  
в) площу повної поверхні;  
г) діагональ;  
д) кут між двома мимобіжними ребрами;

- е) довжини усіх діагоналей основи;
- є) довжини усіх діагоналей бічної грані;
- ж) кут між двома діагоналями однієї основи;
- з) кут між двома діагоналями однієї бічної грані;
- и) кут між двома діагоналями двох бічних граней;
- і) кут між бічним ребром і діагоналлю однієї бічної грані;
- ї) кут між двома мимобіжними діагоналями двох суміжних граней;
- к) кут між двома мимобіжними діагоналями двох несуміжних граней;
- л) кут між діагоналлю паралелепіеда і площиною основи;
- м) кут між діагоналлю паралелепіеда і бічним ребром;
- н) кут між діагоналлю паралелепіеда і мимобіжною діагоналлю грані.
- о) найкоротшу відстань між двома паралельними ребрами основи;
- п) відстань між двома мимобіжними ребрами несуміжних граней
- р) найкоротшу відстань між двома паралельними ребрами несуміжних граней;
- с) найкоротша відстань між двома непаралельними і немимобіжними ребрами;
- т) кут між двома мимобіжними ребрами;
- у) кут між двома суміжними ребрами основи;
- ф) найкоротшу відстань між діагоналлю куба і мимобіжною до неї діагоналлю основи;
- х) найкоротшу відстань між мимобіжними діагоналями несуміжних(паралельних) граней;
- ц) найкоротшу відстань між двома мимобіжними діагоналями суміжних (перпендикулярних) граней.

## **БАНК ЗАДАЧ КУРСУ «ГЕОМЕТРІЯ КУБА»**

### **Група Б**

1. Наведіть приклади тіл, які мають форму паралелепіеда, з навколишнього середовища.
2. Чи вірно, що довільні три сусідні вершини куба задають площину грані куба?
3. Чи вірно, що два довільні бічних ребра куба задають грань куба?
4. Чи вірно, що ребро нижньої основи куба і паралельне до нього ребро верхньої основи куба задають грань куба?
5. Чи вірно, що грань нижньої основи куба являється перпендикулярною до бічних граней куба?
6. Чи вірно, що дві бічні ребра куба утворюють перпендикулярні грані куба?
7. Чи вірно, що сусідні вершини куба – це вершини, які являються кінцями одного ребра куба?
8. Чи вірно, що усі бічні ребра куба являються паралельними?
9. Чи вірно, що ребро нижньої основи куба являються паралельним до усіх ребер верхньої основи куба?
10. Чи вірно, що ребро нижньої основи куба являються мимобіжним до деяких ребер верхньої основи куба?
11. Чи вірно, що деякі бічні ребра куба являються перпендикулярними?
12. Три грані паралелепіеда - прямокутники. Чи впливає з цього, що даний паралелепіед прямокутний?
13. Три грані паралелепіеда - квадрати. Чи впливає з цього, що даний паралелепіед куб?
14. Три грані многогранника - трикутника. Чи впливає з цього, що це призма?
15. Чи можна, знаючи положення п'яти будь-яких вершин куба, однозначно можна визначити положення інших трьох вершин куба у просторі?
16. Чи можна, знаючи положення довільних чотирьох вершин куба, однозначно можна визначити положення інших чотирьох вершин куба у просторі?
17. Чи можна, знаючи чотири вершини куба, що являються кінцями трьох вимірів: ширини,

довжини, висоти куба, які виходять з однієї точки, то можна однозначно визначити положення інших чотирьох вершин куба у просторі?

18. Скільки відрізків, що задані на поверхні куба, належать до ребер куба?
19. Скільки відрізків, що задані на поверхні куба, належать до діагоналей граней куба?
20. Скільки відрізків, кінці яких лежать на поверхні куба належать до діагоналей куба?
21. Скільки різних площин, що утворюються на множині восьми вершин куба (кожна з цих площин містить хоч а б три вершини куба)?
22. Скільки діагональних перерізів має куб?
23. Скільки січних площин(**рівносторонні трикутні перерізи куба**), кожна з яких містить в собі тільки три вершини куба?
24. Чи можна отримати в перерізи куба площиною: а)правильний трикутник; а)правильний чотирикутник; а)правильний п'ятикутник; а)правильний шестикутник?
25. Скільки різних (рівних) правильних тетраедрів можна побудувати на восьми вершинах куба?
26. Скільки різних (рівних) чотирикутних пірамід можна побудувати на восьми вершинах куба?
27. Яке відношення між числом граней, числом вершин, та числом ребер має місце для многогранника?
28. Чи можна провести площину, яка перетинає тригранний кут куба, так, щоб у перерізі утворився тупокутний трикутник?
29. Чи завжди можна провести площину, яка перетинає чотиригранний кут, так, щоб у перерізі утворився паралелограм?
30. Чи можна куб перетнути площиною так, щоб отримати в перерізі: а) прямокутний або тупокутний трикутник; б) квадрат; в) прямокутник; г) ромб, відмінний від квадрата; д) паралелограм, відмінний від ромба; е) трапецію; є) правильний п'ятикутник; ж) який-небудь семикутник?
31. Чи існує многогранник з п'ятьма ребрами?
32. Чи існує многогранник з шістьма ребрами?
33. Чи існує многогранник з сімома ребрами?
34. Чи може призма мати вісім ребер?
35. Яка фігура утвориться в перетині поверхні куба площиною, що проходить через центр куба перпендикулярно його діагоналі?
36. Яка фігура утвориться в перетині поверхні куба площиною, яка визначається кінцями трійки ребер куба, що виходять із однієї вершини?
- 37.1 Чи існує многогранник з непарним числом граней, кожна з яких містить непарне число сторін?
- 37.2 Як треба провести площину, щоб вона перетинала поверхню правильного тетраедра по квадрату?
38. Який многокутник утворюється при перетині поверхні правильного тетраедра площиною, паралельною двом його протилежним ребрам? Чи вірно, що периметр цього перерізу не залежить від вибору такої січної площини.
39. Як треба провести площину, щоб вона перетинала поверхню куба по правильному шестикутнику?
40. Чи можна куб перетнути площиною так, щоб отримати в перерізі: а) прямокутний або тупокутний трикутник; б) квадрат; в) прямокутник; г) ромб, відмінний від квадрата; д) паралелограм, відмінний від ромба; е) трапецію; є) правильний п'ятикутник; ж) який-небудь семикутник?
41. Покажіть, що існує тетраедр (тобто трикутна піраміда), висоти якого не перетинаються в одній точці.
42. Покажіть,, що кожна трикутна піраміда володіє плоским перерізом у формі ромба.

**ЗАДАЧІ НА ОБЧИСЛЕННЯ З ТЕМИ «ПАРАЛЕЛЕПІПЕДИ»**

1. Виміри прямокутного паралелепіпеда, виміри 9 см, 12 см і 20 см. Знайдіть:

- 1) площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда;
- 2) суму усіх ребер паралелепіпеда;
- 3) об'єм паралелепіпеда;
- 4) площу діагональних перерізів паралелепіпеда;
- 5) кількість різних трикутних пірамід, з вершинами паралелепіпеда та їх об'єми.
- 6) кількість різних чотирикутних пірамід, з вершинами паралелепіпеда та їх об'єми та поверхні;
- 7) кількість способів, якими можна дістатися найкоротшим шляхом, якщо дозволено рухатися тільки по ребрам паралелепіпеда від однієї вершини до протилежної вершини;
- 8) кількість центрів симетрій паралелепіпеда;
- 9) кількість осей симетрій паралелепіпеда;
- 10) кількість площин симетрій паралелепіпеда;
- 11) площу поверхні сфери, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда;
- 12) об'єм кулі, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда;
- 13) кількість відрізків, з кінцями у вершинах паралелепіпеда.
- 14)

2. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого 3 см, 12 см і 4 см. Знайдіть:

- а) площі усіх діагональних перерізів;
- б) площу бічної поверхні;
- в) площу повної поверхні;
- г) діагональ паралелепіпеда;
- д) кут між двома мимобіжними ребрами;
- е) довжини усіх діагоналей основи;
- є) довжини усіх діагоналей бічної грані;
- ж) кут між двома діагоналями однієї основи;
- з) кут між двома діагоналями однієї бічної грані;
- и) кут між двома діагоналями двох бічних граней;
- і) кут між бічним ребром і діагоналлю однієї бічної грані;
- ї) кут між двома мимобіжними діагоналями двох суміжних граней;
- к) кут між двома мимобіжними діагоналями двох несуміжних граней;
- л) кут між діагоналлю паралелепіпеда і площиною основи;
- м) кут між діагоналлю паралелепіпеда і бічним ребром;
- н) кут між діагоналлю паралелепіпеда і мимобіжною діагоналлю грані.
- о) найкоротшу відстань між двома паралельними ребрами основи;
- п) відстань між двома мимобіжними ребрами несуміжних граней
- р) найкоротшу відстань між двома паралельними ребрами несуміжних граней;
- с) найкоротша відстань між двома непаралельними і немимобіжними ребрами;
- т) кут між двома мимобіжними ребрами;
- у) кут між двома суміжними ребрами основи;
- ф) найкоротшу відстань між діагоналлю паралелепіпеда і мимобіжною до неї діагоналлю основи;
- х) найкоротшу відстань між мимобіжними діагоналями несуміжних(паралельних) граней;
- ц) найкоротшу відстань між двома мимобіжними діагоналями суміжних

(перпендикулярних) граней.

3. В основі прямого паралелепіпеда з висотою 5 см лежить ромб з діагоналями 6 см і 8 см.

Знайдіть:

- а) площі усіх діагональних перерізів;
- б) площу бічної поверхні;
- в) площу повної поверхні;
- г) діагональ паралелепіпеда;
- д) кут між двома мимобіжними ребрами;
- е) довжини усіх діагоналей основи;
- є) довжини усіх діагоналей бічної грані;
- ж) кут між двома діагоналями однієї основи;
- з) кут між двома діагоналями однієї бічної грані;
- и) кут між двома діагоналями двох бічних граней;
- і) кут між бічним ребром і діагоналлю однієї бічної грані;
- ї) кут між двома мимобіжними діагоналями двох суміжних граней;
- к) кут між двома мимобіжними діагоналями двох несуміжних граней;
- л) кут між діагоналлю паралелепіпеда і площиною основи;
- м) кут між діагоналлю паралелепіпеда і бічним ребром;
- н) кут між діагоналлю паралелепіпеда і мимобіжною діагоналлю грані.
- о) найкоротшу відстань між двома паралельними ребрами основи;
- п) відстань між двома мимобіжними ребрами несуміжних граней
- р) найкоротшу відстань між двома паралельними ребрами несуміжних граней;
- с) найкоротша відстань між двома непаралельними і немимобіжними ребрами;
- т) кут між двома мимобіжними ребрами;
- у) кут між двома суміжними ребрами основи;
- ф) найкоротшу відстань між діагоналлю паралелепіпеда і мимобіжною до неї діагоналлю основи;
- х) найкоротшу відстань між мимобіжними діагоналями несуміжних(паралельних) граней;
- ц) найкоротшу відстань між двома мимобіжними діагоналями суміжних (перпендикулярних) граней.

### ПОВЕРХНЯ ПРИЗМИ

1. а) У **правильній трикутній призмі** діагональ бічної грані дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити бічну поверхню призми.
- б) У **правильній трикутній призмі** діагональ бічної грані утворює з бічним ребром кут  $c$ . Радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює  $r$ . Визначити бічну поверхню призми.
- в) Визначте площу бічної поверхні похилої призми, у якої бічне ребро дорівнює 10 см, периметр основи дорівнює 21 см, а периметр перерізу, перпендикулярного до бічного ребра, - 17 см (задача має зайві дані).
2. а) Діагональ **правильної чотирикутної призми** дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити бічну поверхню призми.
- б) У **правильній чотирикутній призмі** висота дорівнює  $H$ . Діагональ призми утворює з бічним ребром кут  $\alpha$ . Визначити бічну поверхню призми.
- в) У прямокутному паралелепіпеді  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  діагональ  $B_1 D$  дорівнює  $d$  і нахилена до площини основи під кутом  $\alpha$ . Тоді довжина бічного ребра  $BB_1$  обчислюється за формулою...
3. а) В основі **прямої призми** лежить ромб з більшою діагоналлю  $d$ . Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут  $\alpha$ , а діагональ бічної грані — кут  $\beta$ . Визначити бічну поверхню призми.
- б) В основі **прямої призми** лежить ромб з тупим кутом  $\beta$  і меншою діагоналлю  $d$ . Більша

діагональ призми нахилена до площини основи під кутом  $\alpha$ . Визначити бічну поверхню призми.

4. а) Основою прямокутної призми є прямокутний трикутник із катетом 5 см і гіпотенузою 13 см. Висота призми дорівнює 8 см. Знайдіть поверхню бічної поверхні призми.

б) Знайдіть площу діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 12 см, а сторони основи - 8 см і 6 см.

в) Двогранний кут дорівнює  $30^\circ$ . Точка А, що лежить на одній із граней цього кута, віддалена, від ребра цього кута на 12 см. Знайдіть відстань від точки А до другої грані.

г) Основа прямого паралелепіпеда - ромб із більшою діагоналлю  $4(3)^{0.5}$  см і гострим кутом  $60^\circ$ . Знайдіть повну поверхню паралелепіпеда  $S_{\text{повн}}$ . У відповідь запишіть  $S_{\text{повн}} : (3)^{0.5}$ .

### ОБ'ЄМ ПРИЗМИ

1. а) В основі **прямої призми** лежить рівнобедрений трикутник з кутама при вершині і радіусом описаного кола  $r$ . Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити об'єм призми.

б) В основі **прямої призми** лежить рівнобедрений трикутник з кутом  $\alpha$  при основі і радіусом вписаного кола  $r$ . Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити об'єм призми.

2. а) В основі **прямої призми** лежить рівнобедрений трикутник з кутама при вершині. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити об'єм призми.

б) В основі **прямої призми** лежить рівнобедрений трикутник з кутом  $\alpha$  при основі. Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити об'єм призми.

3. а) Основою **прямої призми** є прямокутний трикутник з гострим кутом  $\alpha$  і гіпотенузою  $c$ . Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити об'єм призми.

б) В основі **прямої призми** лежить прямокутний трикутник з гострим кутом  $\alpha$ . Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити об'єм призми.

4. а) В основі **прямої призми** лежить трикутник з кутами  $\beta$  і  $\gamma$  та радіусом описаного кола  $r$ . Діагональ бічної грані, що містить сторону, для якої дані кути є прилеглими, утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити об'єм призми.

б) В основі **прямої призми** лежить трикутник з кутами  $\beta$  і  $\gamma$ . Діагональ бічної грані, що містить сторону, для якої дані кути є прилеглими, дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити об'єм призми.

5. а) В основі **прямої призми** лежить прямокутник з кутом  $\alpha$  між діагоналями. Діагональ призми дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити об'єм призми.

б) В основі **прямої призми** лежить прямокутник з діагоналлю  $d$ , яка утворює зі стороною основи кут  $\beta$ . Діагональ призми утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити об'єм призми.

6. а) В основі **прямої призми** лежить прямокутна трапеція з гострим кутом  $\alpha$ . Більша діагональ трапеції дорівнює  $d$  і є бісектрисою гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити об'єм призми.

б) В основі **прямої призми** лежить прямокутна трапеція з тупим кутом  $\alpha$ . Менша діагональ трапеції є бісектрисою тупого кута. Менша діагональ призми дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити об'єм призми.

7. а) В основі **прямої призми** лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною  $c$  і гострим кутом  $\alpha$ . Діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні. Діагональ призми утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити об'єм призми.

б) В основі **прямої призми** лежить рівнобічна трапеція з тупим кутом  $\alpha$ . Діагоналі цієї

трапеції перпендикулярні до бічних сторін. Діагональ призми дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити об'єм призми.

8. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами 4см і 10 см та з бічною стороною 5см. Бічне ребро призми дорівнює 10см. Обчисліть повну поверхню призми.

9. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють  $a$  і  $b$ . Діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом  $\alpha$ . Визначити висоту паралелепіпеда.

10. Площа основи правильної чотирикутної призми  $25\text{см}^2$ , а її бічне ребро - 10см. Знайти площу бічної поверхні призми.

11. Основа прямої призми - ромб зі стороною  $a$  і гострим кутом  $\alpha$ . Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити площу бічної поверхні призми.

12. Площина яка проходить через сторону основи правильної трикутної призми і протилежну вершину іншої основи, утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Діагоналі бічних граней призми дорівнюють  $l$ , а кут між ними -  $\alpha$ . Визначте висоту призми.

13. Основа прямої призми - прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$ . Діагоналі бічної грані, що містить гіпотенузу, утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Визначте висоту призми.

14. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює  $60\text{ см}^2$ , а її бічне ребро - 10см. Знайти площу основи призми.

15. Основа прямокутної призми є прямокутник діагональ якого дорівнює  $a$  і утворює зі стороною кут  $\alpha$ . Визначити площу бічної поверхні призми, якщо її діагональ утворює з площиною основи кут  $\beta$ .

16. Через сторону нижньої основи правильної трикутної призми і протилежну вершину верхньої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Перерізом є трикутник з кутом  $\alpha$  при вершині верхньої основи, висота призми -  $H$ . Визначити площу перерізу.