Системи рівнянь з дійсним параметром

Автор: Негода Сергій Петрович

Системи нелінійних рівнянь з параметром

Завдання (із ЗНО з математики за 2017 рік)

1.Розв’яжіть систему двох рівнянь:

|x-y|=|x-a|;

lg(y-a)=lg(4a²+x-x²)

залежно від дійсних значень параметра a.

Розв’язання: 1) Розкриємо знак модуля у рівнянні |x-y|=|x-a|. Для цього розглянемо чотири випадки:

1) якщо x-y≥0, x-a≥0, тоді x-y=x-a, тобто y=a.

2) якщо x-y≥0, x-a тоді x-y=a-x, тобто y=2x-a.

3) якщо x-y тоді y-x=x-a, тобто y=2x-a.

4) якщо x-y тоді y-x= a-x, тобто y=a.

Розглянемо дві пари чисел, що задовольняють рівнянні |x-y|=|x-a|:

(x; 2x-a),

(x; a).

Після безпосередньої перевірки пари чисел (x; a) у другому рівнянні отримаємо висновок, що ця пара не являється розв’язком даної системи рівнянь.

Після безпосередньої перевірки пари чисел (x; 2x-a) робимо висновок: ця пара задовольняє друге рівняння при умові виконання ОДЗ.

Тепер отримаємо розв’язки даної системи рівнянь. Для цього у друге рівняння замість змінної y підставимо вираз 2x-a, матимемо:

$lg(2x\text{-}a\text{-}a)=lg(4a^2+x\text{-}x^2)$

Виконаємо дослідження кількості розв’язків цього рівняння в залежності від параметра a.

Знайдемо ОДЗ: x>a, $4a^2+x-x^2>0$.

Розглянемо рівняння 2x-2a=$4a^2+x-x^2$

x^2+x-4a^2-2a=0;

D=$(1+4a)^2$;

x_1=-2a-1;

x_2=2a.

Тоді

y_1=-5a-2;

y_2=3a.

Перевіримо, чи належить до ОДЗ другого рівняння $lg(2x\text{-}a\text{-}a)=lg(4a^2+x\text{-}x^2)$

даної системи дві пари чисел:

(-2a-1; -5a-2), (2a; 3a). Перевірку виконайте самостійно.

Таким чином, пара чисел (-2a-1; -5a-2) вимагає такої множини a*1/3.*

Пара чисел (2a; 3a) вимагає такої множини a>*0.*

Відповідь: якщо a*1/3, то система має одну пару розв’язків:* (-2a-1; -5a-2);

якщо -1/3<a<*0, то система розв’язків немає;*

якщо a>*0, то система має розв’язок:* (2a; 3a).

Завдання для самостійної роботи.

2.Розв’яжіть систему двох рівнянь

|2a-5x|=|x-2y|;

$lg(y\text{-}3x+a)=lg(18a^2+23a\text{-}4+(9a\text{-}2)x+x^2)$

залежно від дійсних значень параметра а.

Відповідь: якщо а*1+3/17, то система розв'язків немає;*

якщо -1+3/17<а<*5/32, то система має одну пару:* (-3а-4; 7а+8);

якщо а>*5/32, то система має дві пари:* (-6а+1; 13а-2), (-3а-4; 7а+8).

3.Розв'яжіть систему двох рівнянь:

$|y+x-a|=|4x-5a|$;

$(2a-y-2x)^{0,5}=a$

залежно від дійсних значень параметра *а.*

Відповідь: якщо а<*0, то система розв'язків немає;*

якщо а≥*0, то система має два розв'язки:* $(1{,}2a-0{,}2a^2; -0{,}4a-0{,}6a^2)$, $(3^{-1}a^2+4a/3; -2a/3-5a^2/3)$.

4.Знайдіть кількість розв'язків системи двох рівнянь:

$|x-a|\times|y-a^2|=0$;

$|x-1+a^2|\times|y-a^2-a|=0$;

залежно від дійсних значень параметра *а.*

Відповідь: $(a; -a+a^2)$, $(-1+a^2; a^2)$, для дійсних значень параметра *а*.

5.Знайдіть кількість розв'язків системи двох рівнянь:

$x^2-ax-2x+4a-2a^2=0$;

$xy-3y+ay-2ax+4a-2a^2=0$.

Пропозиція: розкласти на множники ліві частини обох рівнянь.

Системи нелінійних рівнянь

6. Розв'язати систему рівнянь:
$4-2\cos py=2/(1+2x^2)$;
$y=2-x^2$

Якщо система єдиний розв’язок (x_o ; y_o), то у відповідь записати суму $x_o + y_{o,}$ Якщо система більше, ніж один розв’язок, то у відповідь записати кількість усіх розв’язків.
Пропозиція: дослідити властивості функції, що представляє ліву та праву частину рівнянь.
Відповідь: (0; 2) то сума 0 + 2 = 2.

7. Розв’язати систему рівнянь:

sinpy=1-x^2;

y=$(x^2-1)^{0,5}$

Якщо система єдиний розв’язок (x_o; y_o), то у відповідь записати суму $x_o + y_{o,}$

Якщо система більше, ніж один розв’язок, то у відповідь записати кількість усіх розв’язків.

Відповідь: (1; 0) та (-1; 0.(Система має два розв’язки тобто, відповідь: 2.

8.Розв’язати систему рівнянь:

cospy-1=$(x+1)^2$;

y=$(1+x)(1+x)^{0,5}$.

Якщо система єдиний розв’язок (x_o ; y_o), то у відповідь записати суму $x_o + y_{o,}$ Якщо система більше, ніж один розв’язок, то у відповідь записати кількість усіх розв’язків.

Відповідь: (-1; 0.(Система має один розв’язок тобто, відповідь: -1.

9. Розв’язати систему рівнянь:

sin2py = x^2+x;

y = $x^2(x+1)^{0,5}$

Якщо система єдиний розв’язок (x_o ; y_o), то у відповідь записати суму $x_o + y_{o,}$ Якщо система більше, ніж один розв’язок, то у відповідь записати кількість усіх розв’язків.

Відповідь: (0; 0) та (-1; 0.(Система має два розв’язки тобто, відповідь: 2.

10. Розв’язати систему рівнянь:

$(1\text{-siny})^{0,5}$ = 1-x;

y^2 =$(1-x^2)^3$.

Якщо система єдиний розв’язок (x_o ; y_o), то у відповідь записати суму $x_o + y_{o,}$ Якщо система більше, ніж один розв’язок, то у відповідь записати кількість усіх розв’язків.

Відповідь: 1.

Нелінійні рівняння з параметрами

Найскладніша задача на ЗНО -2015 з математики

При яких значеннях параметра ***a*** рівняння $\frac{(x^2-2(a-1)x+6a-3)(tg(\pi x)-1)}{\sqrt[4]{49x^2-84xa+36a^2}}=0$ на проміжку xє[0; 1] має рівно два різні корені.

$$\frac{(x^2-2(a-1)x+6a-3)(tg(\pi x)-1)}{\sqrt[4]{49x^2-84xa+36a^2}}=0,$$

Розв'язання. Область допустимих значень для дійсної змінної x.

$$ОДЗ:\begin{cases}49x^2-84xa+36a^2>0,\\ \pi x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\frac{6a}{7},\\ x\neq\frac{1}{2}+n, n\in Z,\end{cases}$$

Область допустимих значень для дійсної змінної a.

$$ОДЗ: 49x^2-84xa+36a^2>0, тобто\ a\neq\frac{7x}{6}.$$

Рівняння на ОДЗ рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} x^2-2(a-1)x+6a-3=0, \\ tg(\pi x)-1=0. \end{array}\right.$

Квадратне рівняння розглянемо відносно параметра ***a***, як рівняння першого степеня. Виразимо змінну а через змінну х, і отримаємо: $a(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)}$. Враховуючи, що хϵ[0; 1], скоротимо і матимемо: $a(x)=\dfrac{(x+1)}{2}$.

Остання рівність представляє собою лінійну залежність(функцію) на області визначення хϵ[0; 1] та області значення аϵ[0,5;1].

Тригонометричне рівняння $tg\pi x=1,\Rightarrow \pi x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}+k, k\in Z.$ Враховуючи умову завдання , яке обмежує корені на одиничний проміжок, отримаємо, що х =0,25.

Вияснимо, виконання ОДЗ для лінійної функції: $a(x)=\dfrac{(x+1)}{2}$.

1)Для змінної ***x*** на одиночному проміжку [0; 1] значення х=0,25 не мають повторюватися, як однакові корені у різних множниках, тому значення змінної ***a*** не дорівнює числу 0,5(0,25+1)=0,625.

2)Для змінної ***x*** на одиночному проміжку [0; 1] при значенні х=0, 5 не існуватиме значення для змінної ***a*** , як виконання умови ОДЗ, тому значення змінної а не дорівнює числу 0,5(0,5+1)=0,75.

3)Для змінної ***x*** на одиночному проміжку [0; 1] при значенні х= 6а/7 не існуватиме значення для змінної ***a*** , як виконання умова ОДЗ, тому значення змінної а не дорівнює числу 0,875. Отже, з проміжку [0,5;1] треба виключити ці три числа.

Відповідь: $a\in[0{,}5;0{,}625)\cup(0{,}625;0{,}75)\cup(0{,}75;0{,}875)\cup(0{,}875;1]$.

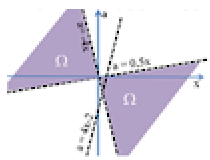
Додаткове завдання для тренування кмітливості!

При яких значеннях параметра ***a*** рівняння $\dfrac{(4x^2+(2-a)x-a-2)tg(\pi x)}{\sqrt[4]{(x+0{,}25a)(x-2a)}}=0$ на проміжку хϵ[0; 2] має рівно два різні корені.

Розв'язання. $\dfrac{(4x^2+(2-a)x-a-2)tg(\pi x)}{\sqrt[4]{(x+0{,}25a)(x-2a)}}=0$

Область допустимих значень для пари (х;а) покажемо графічно у координатній площині.

$$ОДЗ:\left\{\begin{array}{l} (x+0{,}25a)(x-2a)>0, \\ \pi x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq-0{,}25a, x\neq 2a, x\in\Omega \\ x\neq\dfrac{1}{2}+n, n\in Z, \end{array}\right.$$



Рівняння на ОДЗ рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} 4x^2+(2-a)x-a-2=0, \\ tg(\pi x)=0. \end{array}\right.$

Квадратне рівняння розглянемо відносно параметра ***a***, як рівняння першого степеня. Виразимо змінну а через змінну х, і отримаємо: $a(x)=\dfrac{(4x-2)(x+1)}{(x+1)}$. Враховуючи, що хϵ[0; 2], скоротимо і матимемо: $a(x)=4x-2$.

Остання рівність представляє собою лінійну залежність(функцію) на області визначення хϵ[0; 2] та області значення аϵ[-2;6].

Тригонометричне рівняння $tg\pi x = 0, \Rightarrow \pi x = \pi k, k \in Z, \Rightarrow x = k, k \in Z.$ Враховуючи умову завдання, яке обмежує корені на проміжок [0; 2] , отримаємо, що $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Вияснимо, виконання умов ОДЗ для зростаючої лінійної функції: $a(x) = 4x - 2$. Графіком цієї функції є пряма, що перетинає дві прямі a=-4x, та a=0,5x, (вони є межею зафарбованої частини на рисунку, яка не входить до множини Ω) у двох точках: (0,25; -1) та ($^4/_7$; $^2/_7$). Ці дві точки є результатом розв'язання двох систем лінійних рівнянь. Тому, перетинаючи з ОДЗ, отримаємо для змінної x∈(0,25; $^4/_7$) та перетинаючи ОДЗ для змінної параметра a: a∈(-1; $^2/_7$). До речі, нам дуже повезло, не треба виконувати деяких обчислень, адже три корені рівняння tgπx=0: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ не входять в проміжок x∈(0,25; $^4/_7$), тому їх не вважаємо коренями параметричного рівняння, а перевіряти не варто тому, що у при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ отримаємо від'ємне значення під радикалом четвертого степеня. Проте, треба перевірити на належність до ОДЗ значень x=0,5, x=1,5(бо це умова для існування значення тангенса). Перевірку виконаємо так: a(0,5)=4*0,5-2=0, a(1,5)=4*1,5-2=4. Отже, виключаємо тільки нуль із множини параметра, тому a∈(-1; 0)∪(0; $^2/_7$). Залишилось тільки вияснити, чи завжди існує два розв'язки у квадратного рівняння $4x^2+(2-a)x-2-a=0$, якщо a∈(-1; 0)∪(0; $^2/_7$). Для цього перевіримо знак дискримінанта квадратного рівняння: $D(a)=(2-a)^2-4*4*(-2-a)=17a^2-4a+36$, а цей квадратний тричлен завжди додатній, бо знайшовши його дискримінант, дізнаємося, що він є від'ємним числом, а при a=0, D(0)=36. Або виділимо повний квадрат: $17a^2-4a+36=13a^2+4a^2-4a+1+35=13a^2+(2a+1)^2+$ $+35>0$. Відповідь: $a \in (-1;0) \cup \left(0; \frac{2}{7}\right)$.