

Системи рівнянь з дійсним параметром

Автор: Негода Сергій Петрович

□

Системи нелінійних рівнянь з параметром

Завдання (із ЗНО з математики за 2017 рік)

1. Розв'яжіть систему двох рівнянь:

$$|x-y|=|x-a|;$$

$$\lg(y-a)=\lg(4a^2+x-x^2)$$

залежно від дійсних значень параметра a .

Розв'язання: 1) Розкриємо знак модуля у рівнянні $|x-y|=|x-a|$. Для цього розглянемо чотири випадки:

- 1) якщо $x-y \geq 0$, $x-a \geq 0$, тоді $x-y=x-a$, тобто $y=a$.
- 2) якщо $x-y \geq 0$, $x-a < 0$, тоді $x-y=a-x$, тобто $y=2x-a$.
- 3) якщо $x-y < 0$, $x-a \geq 0$, тоді $y-x=x-a$, тобто $y=2x-a$.
- 4) якщо $x-y < 0$, $x-a < 0$, тоді $y-x=a-x$, тобто $y=a$.

Розглянемо дві пари чисел, що задовольняють рівнянні $|x-y|=|x-a|$:

$(x; 2x-a)$,

$(x; a)$.

Після безпосередньої перевірки пари чисел $(x; a)$ у другому рівнянні отримуємо висновок, що ця пара не являється розв'язком даної системи рівнянь.

Після безпосередньої перевірки пари чисел $(x; 2x-a)$ робимо висновок: ця пара задовольняє друге рівняння при умові виконання ОДЗ.

Тепер отримаємо розв'язки даної системи рівнянь. Для цього у друге рівняння замість змінної y підставимо вираз $2x-a$, матимемо:

$$\lg(2x-a-a)=\lg(4a^2+x-x^2)$$

Виконаємо дослідження кількості розв'язків цього рівняння в залежності від параметра a .

Знайдемо ОДЗ: $x > a$, $4a^2 + x - x^2 > 0$.

Розглянемо рівняння $2x - 2a = 4a^2 + x - x^2$

$$x^2 + x - 4a^2 - 2a = 0;$$

$$D = (1 + 4a)^2;$$

$$x_1 = -2a - 1;$$

$$x_2 = 2a.$$

Тоді

$$y_1 = -5a - 2;$$

$$y_2 = 3a.$$

Перевіримо, чи належить до ОДЗ другого рівняння $\lg(2x-a-a)=\lg(4a^2+x-x^2)$

даної системи дві пари чисел:

$(-2a-1; -5a-2)$, $(2a; 3a)$. Перевірку виконайте самостійно.

Таким чином, пара чисел $(-2a-1; -5a-2)$ вимагає такої множини $a < 1/3$.

Пара чисел $(2a; 3a)$ вимагає такої множини $a > 0$.

Відповідь: якщо $a < 1/3$, то система має одну пару розв'язків: $(-2a-1; -5a-2)$;

якщо $-1/3 < a < 0$, то система розв'язків немає;

якщо $a > 0$, то система має розв'язок: $(2a; 3a)$.

Завдання для самостійної роботи.

2. Розв'яжіть систему двох рівнянь

$$|2a - 5x| = |x - 2y|;$$

$$\lg(y-3x+a)=\lg(18a^2+23a-4+(9a-2)x+x^2)$$

залежно від дійсних значень параметра a .

Відповідь: якщо $a \leq 1+3/17$, то система розв'язків немає;

якщо $-1+3/17 < a < 5/32$, то система має одну пару: $(-3a-4; 7a+8)$;

якщо $a > 5/32$, то система має дві пари: $(-6a+1; 13a-2)$, $(-3a-4; 7a+8)$.

3. Розв'яжіть систему двох рівнянь:

$$|y+x-a|=|4x-5a|;$$

$$(2a-y-2x)^{0,5}=a$$

залежно від дійсних значень параметра a .

Відповідь: якщо $a < 0$, то система розв'язків немає;

якщо $a \geq 0$, то система має два розв'язки: $(1,2a-0,2a^2; -0,4a-0,6a^2)$, $(3^{-1}a^2+4a/3; -2a/3-5a^2/3)$.

4. Знайдіть кількість розв'язків системи двох рівнянь:

$$|x-a| \times |y-a^2|=0;$$

$$|x-1+a^2| \times |y-a^2-a|=0;$$

залежно від дійсних значень параметра a .

Відповідь: $(a; -a+a^2)$, $(-1+a^2; a^2)$, для дійсних значень параметра a .

5. Знайдіть кількість розв'язків системи двох рівнянь:

$$x^2-ax-2x+4a-2a^2=0;$$

$$xu-3y+ay-2ax+4a-2a^2=0.$$

Пропозиція: розкласти на множники ліві частини обох рівнянь.

Системи нелінійних рівнянь □

6. Розв'язати систему рівнянь:

$$4-2\cos y=2/(1+2x^2);$$

$$y=2-x^2$$

Якщо система єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, то у відповідь записати суму $x_0 + y_0$. Якщо система більше, ніж один розв'язок, то у відповідь записати кількість усіх розв'язків.

Пропозиція: дослідити властивості функції, що представляє ліву та праву частину рівнянь.

Відповідь: $(0; 2)$ то сума $0 + 2 = 2$. □□

7. Розв'язати систему рівнянь:

$$\sin \pi y = 1 - x^2;$$

$$y = (x^2 - 1)^{0.5}$$

Якщо система єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, то у відповідь записати суму $x_0 + y_0$.

Якщо система більше, ніж один розв'язок, то у відповідь записати кількість усіх розв'язків.

Відповідь: $(1; 0)$ та $(-1; 0)$. (Система має два розв'язки тобто, відповідь: 2. □□

8. Розв'язати систему рівнянь:

$$\cos \pi y - 1 = (x + 1)^2;$$

$$y = (1 + x)(1 + x)^{0.5}.$$

Якщо система єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, то у відповідь записати суму $x_0 + y_0$. Якщо система більше, ніж один розв'язок, то у відповідь записати кількість усіх розв'язків.

Відповідь: $(-1; 0)$. (Система має один розв'язок тобто, відповідь: -1. □□

9. Розв'язати систему рівнянь:

$$\sin 2\pi y = x^2 + x;$$

$$y = x^2(x + 1)^{0.5}$$

Якщо система єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, то у відповідь записати суму $x_0 + y_0$. Якщо система більше, ніж один розв'язок, то у відповідь записати кількість усіх розв'язків.

Відповідь: $(0; 0)$ та $(-1; 0)$. (Система має два розв'язки тобто, відповідь: 2. □□

10. Розв'язати систему рівнянь:

$$(1 - \sin y)^{0.5} = 1 - x;$$

$$y^2 = (1 - x^2)^3.$$

Якщо система єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, то у відповідь записати суму $x_0 + y_0$. Якщо система більше, ніж один розв'язок, то у відповідь записати кількість усіх розв'язків.

Відповідь: 1. □

Нелінійні рівняння з параметрами**Найскладніша задача на ЗНО -2015 з математики**

При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{(x^2 - 2(a-1)x + 6a - 3)(\operatorname{tg}(\pi x) - 1)}{\sqrt[4]{49x^2 - 84xa + 36a^2}} = 0$ на проміжку $x \in [0; 1]$ має рівно два різні корені.

$$\frac{(x^2 - 2(a-1)x + 6a - 3)(\operatorname{tg}(\pi x) - 1)}{\sqrt[4]{49x^2 - 84xa + 36a^2}} = 0,$$

Розв'язання. Область допустимих значень для дійсної змінної x .

$$ОДЗ: \begin{cases} 49x^2 - 84xa + 36a^2 > 0, \\ \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{6a}{7}, \\ x \neq \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

Область допустимих значень для дійсної змінної a .

$$ОДЗ: 49x^2 - 84xa + 36a^2 > 0, \text{ тобто } a \neq \frac{7x}{6}.$$

□

$$\text{Рівняння на ОДЗ рівносильне сукупності} \begin{cases} x^2 - 2(a-1)x + 6a - 3 = 0, \\ \operatorname{tg}(\pi x) - 1 = 0. \end{cases}$$

Квадратне рівняння розглянемо відносно параметра a , як рівняння першого степеня. Виразимо змінну a через змінну x , і отримаємо: $a(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)}$. Враховуючи, що $x \in [0; 1]$, скоротимо і матимемо: $a(x) = \frac{(x+1)}{2}$.

Остання рівність представляє собою лінійну залежність(функцію) на області визначення $x \in [0; 1]$ та області значення $a \in [0,5; 1]$.

Тригонометричне рівняння $\operatorname{tg} \pi x = 1, \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow x = \frac{1}{4} + k, k \in \mathbb{Z}$. Враховуючи умову завдання, яке обмежує корені на одиничний проміжок, отримаємо, що $x = 0,25$.

Вияснимо, виконання ОДЗ для лінійної функції: $a(x) = \frac{(x+1)}{2}$.

1) Для змінної x на одиничному проміжку $[0; 1]$ значення $x=0,25$ не мають повторюватися, як однакові корені у різних множниках, тому значення змінної a не дорівнює числу $0,5(0,25+1)=0,625$.

2) Для змінної x на одиничному проміжку $[0; 1]$ при значенні $x=0,5$ не існуватиме значення для змінної a , як виконання умови ОДЗ, тому значення змінної a не дорівнює числу $0,5(0,5+1)=0,75$.

3) Для змінної x на одиничному проміжку $[0; 1]$ при значенні $x = 6a/7$ не існуватиме значення для змінної a , як виконання умови ОДЗ, тому значення змінної a не дорівнює числу $0,875$. Отже, з проміжку $[0,5; 1]$ треба виключити ці три числа.

Відповідь: $a \in [0,5; 0,625) \cup (0,625; 0,75) \cup (0,75; 0,875) \cup (0,875; 1]$.

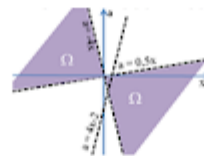
Додаткове завдання для тренування кмітливості!

При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{(4x^2 + (2-a)x - a - 2)\operatorname{tg}(\pi x)}{\sqrt[4]{(x+0,25a)(x-2a)}} = 0$ на проміжку $x \in [0; 2]$ має рівно два різні корені.

$$\text{Розв'язання.} \quad \frac{(4x^2 + (2-a)x - a - 2)\operatorname{tg}(\pi x)}{\sqrt[4]{(x+0,25a)(x-2a)}} = 0$$

Область допустимих значень для пари $(x;a)$ покажемо графічно у координатній площині.

$$\text{ОДЗ:} \begin{cases} (x+0,25a)(x-2a) > 0, \\ \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -0,25a, x \neq 2a, x \in \Omega \\ x \neq \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$



$$\text{Рівняння на ОДЗ рівносильне сукупності} \begin{cases} 4x^2 + (2-a)x - a - 2 = 0, \\ \operatorname{tg}(\pi x) = 0. \end{cases}$$

Квадратне рівняння розглянемо відносно параметра a , як рівняння першого степеня. Виразимо змінну a через змінну x , і отримаємо: $a(x) = \frac{(4x-2)(x+1)}{(x+1)}$. Враховуючи, що $x \in [0; 2]$, скоротимо і матимемо: $a(x) = 4x - 2$.

Остання рівність представляє собою лінійну залежність(функцію) на області визначення $x \in [0; 2]$ та області значення $a \in [-2; 6]$.

Тригонометричне рівняння $\operatorname{tg} \pi x = 0, \Rightarrow \pi x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow x = k, k \in \mathbb{Z}$. Враховуючи умову завдання, яке обмежує корені на проміжок $[0; 2]$, отримаємо, що $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.

Вияснимо, виконання умов ОДЗ для зростаючої лінійної функції: $a(x) = 4x - 2$. Графіком цієї функції є пряма, що перетинає дві прямі $a = -4x$, та $a = 0,5x$, (вони є межею зафарбованої частини на рисунку, яка не входить до множини Ω) у двох точках: $(0,25; -1)$ та $(\frac{4}{7}; \frac{2}{7})$. Ці дві точки є результатом розв'язання двох систем лінійних рівнянь. Тому, перетинаючи з ОДЗ, отримаємо для змінної $x \in (0,25; \frac{4}{7})$ та перетинаючи ОДЗ для змінної параметра $a: a \in (-1; \frac{2}{7})$. До речі, нам дуже повезло, не треба виконувати деяких обчислень, адже три корені рівняння $\operatorname{tg} \pi x = 0: x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ не входять в проміжок $x \in (0,25; \frac{4}{7})$, тому їх не вважаємо коренями параметричного рівняння, а перевіряти не варто тому, що у при $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ отримаємо від'ємне значення під радикалом четвертого степеня. Проте, треба перевірити на належність до ОДЗ значень $x = 0,5, x = 1,5$ (бо це умова для існування значення тангенса). Перевірку виконаємо так: $a(0,5) = 4 \cdot 0,5 - 2 = 0, a(1,5) = 4 \cdot 1,5 - 2 = 4$. Отже, виключаємо тільки нуль із множини параметра, тому $a \in (-1; 0) \cup (0; \frac{2}{7})$. Залишилось тільки вияснити, чи завжди існує два розв'язки у квадратного рівняння $4x^2 + (2-a)x - 2 - a = 0$, якщо $a \in (-1; 0) \cup (0; \frac{2}{7})$. Для цього перевіримо знак дискримінанта квадратного рівняння: $D(a) = (2-a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2-a) = 17a^2 - 4a + 36$, а цей квадратний тричлен завжди додатний, бо знайшовши його дискримінант, дізнаємося, що він є від'ємним числом, а при $a = 0, D(0) = 36$. Або виділимо повний квадрат: $17a^2 - 4a + 36 = 13a^2 + 4a^2 - 4a + 1 + 35 = 13a^2 + (2a+1)^2 + 35 > 0$. Відповідь: $a \in (-1; 0) \cup (0; \frac{2}{7})$.

