

Складніші приклади створення тривимірних інтерактивних моделей

Автор: Порхун Алла Олексіївна

Припустимо, що у просторі є точка O . Нехай ця точка буде початком двовимірної системи координат з осями x та y , та тривимірної з осями u , v , w . Нехай γ – площина, у якій лежить система координат xOy .

Нехай кут між векторами \vec{y} та \vec{w} – α , а кут між векторами \vec{x} та \vec{u} – β .

Не важко довести, що координати проекцій на площину γ одиничних векторів осей тривимірної системи координат у системі координат xOy будуть:

$$\begin{aligned}\vec{u}' & (\cos \alpha, \sin \beta); \\ \vec{v}' & (-\sin \alpha, -\sin \alpha \cos \beta); \\ \vec{w}' & (0, \cos \alpha).\end{aligned}$$

Очевидно, координати проекції точки $A(u_A, v_A, w_A)$ будуть рівні координатам радіус-вектора \vec{OA} .

$$\vec{OA} = u_A \cdot \vec{u}' + v_A \cdot \vec{v}' + w_A \cdot \vec{w}'$$

Спробуємо створити динамічний рисунок у програмі GeoGebra, у якому будуть відображатись проекції одиничних векторів тривимірної системи координат.

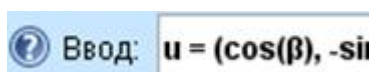
Виконаємо таку послідовність дій.

1. Для початку потрібно додати кути α і β , які можна буде динамічно міняти.



Додаємо повзунки α і β (не забуваємо вказати, що це кут).

1. Тепер нам потрібно зобразити проекції векторів $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.



Найзручніше це зробити за допомогою командного рядка, ввівши у неї команди:

$$u = (\cos(\beta), -\sin(\alpha) \sin(\beta))$$


$$v = (-\sin(\beta), -\sin(\alpha) \cos(\beta))$$

$$w = (0, \cos(\alpha))$$

Після цього на екрані з'являться три вектори. При зміні значень кутів α і β , вони повинні обернутися.

Але існує більш зручний спосіб зміни кутів α і β , ніж використання повзунків. Метод полягає в тому, щоб замість повзунків використовувати точку.

Виконаємо таку послідовність дій:

1.  Поставимо точку A.
2. Введемо послідовно команди

$$xa = x(A)$$

$$ya = y(A)$$

Таким чином, ми ввели два числа: xa та ya – координати абсциси та ординати точки A відповідно.

1. Тепер команди для задання векторів трохи зміняться:

$$\mathbf{u} = (\cos(xa), -\sin(ya) \sin(xa))$$

$$\mathbf{v} = (-\sin(xa), -\sin(ya) \cos(xa))$$

$$\mathbf{w} = (0, \cos(ya))$$

У такому випадку, для того, щоб змінювати кути α і β , потрібно пересувати точку A.

Далі спробуємо створити динамічну модель куба $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ з довжиною ребра a .

1. Будуємо вектори одним з вище описаних способів.



2. Ставимо повзунок a , виставляємо межі числа від 0.1 до 20.

3. Припускаємо, що початок тривимірної системи координат лежить на перетині двох діагоналей куба. В такому випадку координати точок будуть такі:

$$A_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right); B_1\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right); C_1\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right); D_1\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right);$$

$$A_2\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right); B_2\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right); C_2\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right); D_2\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right);$$

4. Найзручніше вводити координати в таблиці (Ctrl+Shift+S).

У комірці **A1** введемо «a/2», програма автоматично обрахує значення.

Заповнимо таблицю координатами з пункту 2. Координати точки у такому випадку будуть розташовані у комірках A1, B1 та C1.

	A	B	C
1	3.05	3.05	3.05
2	-3.05	3.05	3.05
3	3.05	-3.05	3.05
4	-3.05	-3.05	3.05
5	3.05	3.05	-3.05
6	-3.05	3.05	-3.05
7	3.05	-3.05	-3.05
8	-3.05	-3.05	-3.05

5. Тепер по цих координатах потрібно побудувати проекції точок.



Для початку добавимо точку W (вона нам знадобиться для того, щоб отриману проекцію фігури можна було пересувати по екрану).

6. Виберемо з меню пункт **Опції\Позначення\Нові об'єкти відсутні**. Після чого усі нові точки, що з'являтимуться на екрані будуть з'являтися без позначень.

7. Далі у комірку D1 введемо: $W + A1 u + B1 v + C1 w$. Після чого з'явиться перша вершина куба, а у комірці будуть записані координати точки.

8. Вводити $W + A2 u + B2 v + C2 w$ у комірці D2 не обов'язково.

C	D	E
3.05	(10.42, 5.29)	
3.05		
3.05		

Достатньо потягнути за квадратик у кутку виділеної комірки D1 до комірки D8 включно. Комірki D2-D8 заповняться автоматично.

9. Тепер усі вершини зображені на рисунку.

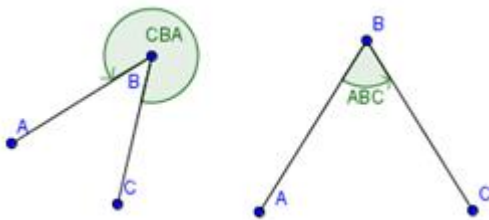


Далі достатньо з'єднати їх відрізками у потрібному порядку.

10. У властивостях кожної вершини можна вказати її назву в полі «Надпис», а у меню «Показувати позначення» вибрати пункт «Заголовок».

Таким чином ми отримали тривимірну модель куба. Але, при побудові рисунка до стереометричних задач важливим є зображення невидимих ліній пунктиром. Це проблематично, оскільки при різних значеннях кутів α та β невидимою може виявитись

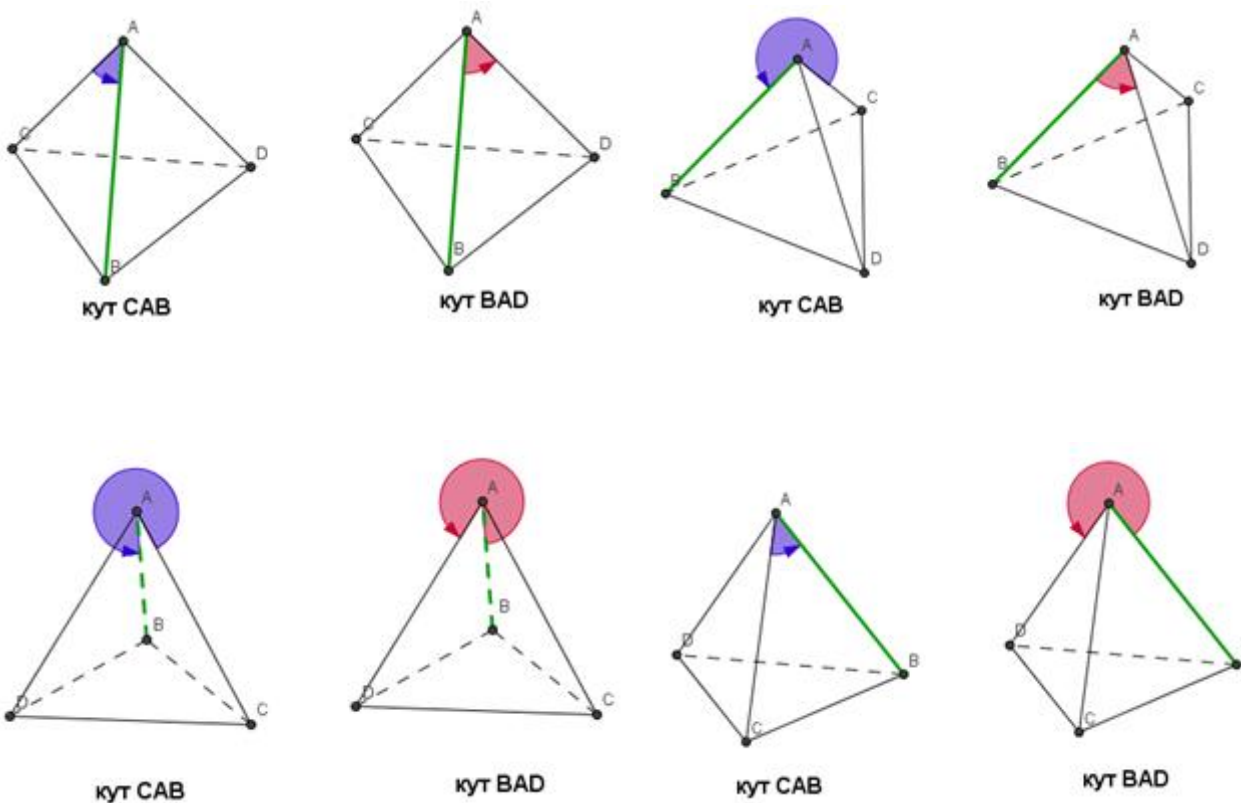
будь-яка з зображених ліній.



Тому, пропонується створити інструмент для програми **GeoGebra**, який в залежності від кутів α і β та положення прямої визначатиме видима вона чи ні, і зобразить її суцільною або пунктирною відповідно.

Потрібно зауважити, що для визначення кута у програмі **GeoGebra** важливим є порядок запису вершин. Тобто . Напрямок усіх кутів - проти годинникової стрілки.

Нехай маємо тетраедр $ABCD$. Розглянемо умови видимості ребра AB .



Якщо один з кутів CAB або BAD менший 180° , то відрізок AB видно і його потрібно зображати суцільною лінією. У іншому ж випадку - пунктирною. Цю умову можна використати для будь-якої піраміди або призми, в основі якої випуклий чотирикутник, умовно підбравши для потрібного відрізка тетраедр, вершинами якого будуть деякі вершини даної фігури.

Щоразу вводити у програмі таку об'ємну умову незручно. Тому варто створити інструмент, який частину роботи виконуватиме автоматично.

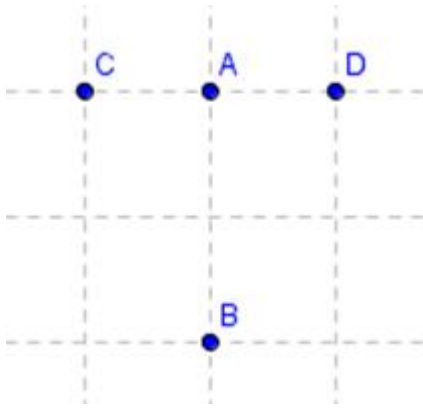
Для цього виконаємо таку послідовність дій:

1. Відкриємо нове вікно програми **GeoGebra**.

2. Приберемо осі (**Вид\Оси**) та відобразимо сітку (**Вид\Сетка**).



3. Поставимо нові точки A, B, C, D так, як показано на рисунку.



4. Впишемо команди в командний рядок:

Якщо[Кут[C,A,B]Кут[B,A,D], Відрізок [A,B]]

Якщо[¬(Кут[C,A,B]Кут[B,A,D]), Відрізок [A,B]]

Тепер викличемо вікно властивостей відрізка b і у вкладці “**Стиль**” у пункті “**Стиль лінії**” виберемо пунктирну лінію. Після цього, якщо поміняти точки C і D місцями, то відрізок AB повинен стати пунктирним.

5. Викличемо вікно **Инструменты\Создать новый инструмент**. Як вихідні об’єкти виберемо відрізки a і b . Як вхідні – точки A, B, C, D (у такому ж порядку).

У вкладці “**Имя и значок**” у полі “**Имя**” введемо “**Відрізок 3D**”. Поле “**Команда**” заповниться автоматично.



Значок можна створити самому або завантажити за адресою <http://mathforum.at.ua/3d.jpg>.

6. Викличемо вікно **Инструменты\Управление инструментами**. Натиснемо “**Сохранить как**” і збережемо інструмент під назвою “**Відрізок3D.ggt**”]

Після виконання описаних вище дій створиться файл формату **.ggt** з інформацією про інструмент, який ми будемо використовувати для подальшого створення об’ємних динамічних ілюстрацій.

Створимо тепер шаблон для подальшої роботи з векторами та щойно створеним інструментом.

1. Збережемо файл як “**Шаблон.ggb**”.

2. Приберемо осі.



3. Поставимо точку і задамо їй назву Obert.

4. Введемо послідовно команди

$$xa = x(\text{Obert})$$

$$ya = y(\text{Obert})$$

$$u = (\cos(xa), -\sin(ya) \sin(xa))$$

$$v = (-\sin(xa), -\sin(ya) \cos(xa))$$

$$w = (0, \cos(ya))$$

5. Виділимо отримані вектори і у властивостях вкажемо їх не відображати.

6. Відкриємо файл з інструментом “Відрізок3D”.

7. Натиснемо за “Сохранить”.

Тепер спробуємо побудувати модель куба, використовуючи щойно створений шаблон.

1. Відкриємо файл “Шаблон.ggb” та збережемо його як “Куб.ggb”.

2. Повторюємо дії з пунктів 2-8 попередньої побудови куба.

3. Тепер потрібно зобразити ребра. Використаємо створений нами інструмент “Відрізок.ggt”.



Натискаємо на іконку і вибираємо точки у такій послідовності: D_5, D_1, D_7, D_6 . Після цього повинно з'явитися ребро D_1D_5 .

Далі послідовно використовуючи інструментом “Відрізок3D”, вибираємо по 4 точки, додаючи до ілюстрації по новому ребру. Вибираємо точки у такій послідовності:

$$D_7, D_3, D_8, D_5; \quad D_8, D_4, D_6, D_7; \quad D_6, D_2, D_5, D_8; \quad D_8, D_6, D_5, D_4;$$

$$D_6, D_5, D_7, D_2; \quad D_5, D_7, D_8, D_1; \quad D_7, D_8, D_6, D_3; \quad D_3, D_1, D_2, D_7;$$

$$D_1, D_2, D_4, D_5; \quad D_2, D_4, D_3, D_6; \quad D_4, D_3, D_1, D_8;$$

Отримали куб. При його обертанні видимі ребра зображаються суцільними відрізками, а невидимі – пунктирними.

4. У властивостях точок D_1 - D_8 в пункті “Показувать обозначения” вказуємо “Заголовок”. В пункті “Надпись” для кожної точки вказуємо її назву.

