

ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ ВІННИЦЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ  
КУ «МІСЬКИЙ МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ» КОМУНАЛЬНИЙ  
КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА  
ГІМНАЗІЯ №17 ВМР»

# РЕКУРСІЯ. РЕКУРСИВНІ ОБЧИСЛЕННЯ. ШЛЯХИ ОПТИМІЗАЦІЇ АЛГОРИТМІВ

**Номінація**

**«Електронно-освітній ресурс»**

**Ветров Віталій Вікторович**

**учитель інформатики**

**«спеціаліст першої категорії»**

**тел. (068) 622 34 46**

**м. Вінниця**

**2019**

Автор **Ветров Віталій Вікторович**, вчитель інформатики комунального закладу «Фізико-математична гімназія № 17 Вінницької міської ради»

**Ветров В.В.** «Рекурсія. Рекурсивні обчислення. Шляхи оптимізації рекурсивних алгоритмів». Електронно-освітній ресурс/Ветров В.В.. – Вінниця: ММК, 2019.

#### **Рецензенти:**

**Балабан Р.А.**, учитель інформатики, спеціаліст вищої кваліфікаційної категорії, КЗ «Загальноосвітня школа I – III ступенів № 34 із спеціалізованими класи з поглибленим вивченням математики та фізики»

Електронний ресурс містить основні методи дослідження рекурсивних алгоритмів та задачі, що спрямовані на виховання інформаційної компетентності в учнів. Посібник рекомендовано використовувати при вивченні курсу інформатики в 10 або 11 класах загальноосвітніх або профільних фізико-математичних навчальних закладів.

Курс містить основні прикладні задачі, які спрямовані на формування в учнів умінь будувати рекурсивні алгоритми та переходити від рекурсивних до алгоритмів, що використовують динамічне програмування.

В курсі міститься 10 уроків. Сам курс розташовано за посиланням - <https://disted.edu.vn.ua/courses/work/1117>.

У курс додані відео реалізації алгоритмів мовою програмування C++. Досить багато задач розглянуто шляхом побудови рекурсії та динаміки. Вказані можливі випадки раціоналізації алгоритмів.

Ресурс може стати корисним не лише учням, а й вчителям, які викладають дану тему у своїх навчальних закладах.

**ЗМІСТ**

РЕКУРСІЯ. РЕКУРСИВНІ ОБЧИСЛЕННЯ. ШЛЯХИ ОПТИМІЗАЦІЇ АЛГОРИТМІВ .....	1
ВСТУП.....	4
СТРУКТУРА ПОСІБНИКА .....	7
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАЛЬНОГО ПОСІБНИКА.....	10
ІНСТРУКЦІЯ ДЛЯ КОРИСТУВАЧА ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАЛЬНОГО ПОСІБНИКА.....	11
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	13

## ВСТУП

В сучасному світі успішною може стати лише та освіта, яка доступна кожному. Одним з проявів такої освіти є дистанційне навчання. Вінниця давно заявила про себе, як про досить розвинуте місто в технічному плані. У місті існує вже досить довго система дистанційної підтримки освіти <https://disted.edu.vn.ua>. Успішно працює електронна система перевірки знань - <https://test.edu.vn.ua/>.

Одним з актуальних напрямів модернізації та інноваційного розвитку природничо-математичного, інформаційного профілів освіти виступає дистанційне навчання.

Дистанційне навчання — це сукупність сучасних технологій, що забезпечують доставку інформації в інтерактивному режимі за допомогою використання ІКТ (інформаційно-комунікаційних технологій) від тих, хто навчає (викладачів, визначних постатей у певних галузях науки, політиків), до тих, хто навчається (студентів чи слухачів). Застосовується під час підготовки як у середніх загальноосвітніх школах та ВНЗ. Основними принципами дистанційного навчання є інтерактивна взаємодія у процесі роботи, надання учням можливості самостійного освоєння досліджуваного матеріалу, а також консультаційний супровід у процесі дослідницької діяльності. Дає змогу навчатися на відстані. Основну роль у здійсненні дистанційного навчання відіграють сучасні інформаційні технології.

Система освіти орієнтована на розвиток особистості учня, створення умов становлення його компетенції, що знаходить своє втілення в здатності до самостійної навчальної діяльності.

Досить зручним інструментом для створення своїх курсів є система дистанційної підтримки освіти <https://disted.edu.vn.ua/>. Курс «Рекурсія. Рекурсивні обчислення. Шляхи оптимізації рекурсивних алгоритмів»

розташовано в системі за посиланням

<https://disted.edu.vn.ua/courses/work/1117>.

The screenshot displays a web interface for an online course. The main content area is titled 'ІНФОРМАТИКА' and lists several resources for 10th grade students. One resource, 'Рекурсія. Рекурсивні обчислення. Оптимізація алгоритмів (Ветров Віталій Вікторович)', is highlighted with a red rectangular border. To the right of the main content is a vertical sidebar menu with various navigation options such as 'Правила роботи з системою', 'Рекомендації щодо оформлення ел. уроку', 'Обрані курси', 'Відеотрансляція уроків', 'Електронні підручники', 'Робочі зошити', 'Вебінари', 'Чат', 'Повідомлення', 'Статистика', 'Налаштування', 'Користувачі', 'Зворотній зв'язок', and 'Контакти'. Below the sidebar is a 'Класи' (Classes) section with a list of grades: '1 клас', '2 клас', and '3 клас'.

Як виявили численні психолого-педагогічні дослідження, умовою формування самооцінки і прагнення до підвищення рівня навчальних досягнень є створення ситуації вибору, в якій учню пропонують спектр завдань різної складності, завдання, які дозволяють проводити також і моніторингові дослідження.

Електронний ресурс пропонує учневі обрати тему та прочитати урок. Майже усі уроки містять відео реалізації алгоритмів на C++. Таким чином, учень може набути умінь писати код та краще зрозуміти сутність написання рекурсивних та оптимізованих динамічних алгоритмів. Також у курсі подано загальні підходи до розв'язування задач, які базуються на рекурентних співвідношеннях.

Цей посібник покликаний допомогти вчителю скоротити час підготовки до уроків, до індивідуальних занять, здійснювати диференційований підхід до навчання з даних тем, організувати оптимальну роботу учня, якщо він був

відсутній під час вивчення теми. Зміст запропонованих завдань повністю відповідає програмі з інформатики.

Новизною курсу є те, що учні, знаходячись вдома за комп'ютерами чи на уроці інформатики, мають можливість опрацьовувати теоретичний матеріал, виконувати варіативні, розроблені автором, завдання.

Таким чином, завданнями курсу є:

1. підвищити мотивацію до вивчення інформатики;
2. ознайомити учнів з особливостями рекурсивних алгоритмів;
3. стимулювати до пошукової діяльності;
4. організувати пошукову роботу учнів шляхом оптимізації рекурсивних алгоритмів;
5. навчити учнів зводити рекурсивні алгоритми до динамічних.

## СТРУКТУРА ПОСІБНИКА

Електронний курс «Рекурсія. Рекурсивні обчислення. Шляхи оптимізації рекурсивних алгоритмів» складається з 10 уроків з теми.

Щоб допомогти учням швидко зрозуміти тему, перший урок містить основні засади побудови рекурсивних функцій..

The screenshot shows a web browser window with the URL <https://disted.edu.vn.ua/courses/work/1117>. The page title is "Отримання знань" (Acquiring Knowledge) and the subtitle is "дистанційна підтримка" (distance support). The course is titled "Уроки" (Lessons) and is authored by "Ветров Віталій Вікторович" (Vetrov Vitaliy Viktorovich) for the subject "Інформатика, 10 клас" (Informatics, 10th grade). The main content area lists the topics of the lessons:

- Поняття рекурсії. Як це працює?
- Рекурсивне та ітераційне обчислення факторіалу
- Рекурсивне піднесення до степеня. Степінь двійки
- Задача про суму цифр числа та задача про розвідку
- Рекурсія. Шляхи оптимізації рекурсивних алгоритмів
- Загальний підхід в розв'язуванні задач на рекурсію. Рекурсивна реалізація задачі про Паліндром
- Без двох нулів. Задача про разворот числа
- Рекурсивні алгоритми розкладання числа на розряди та виведення їх зліва направо та навпаки
- Трикутник Серпінського

At the bottom, there is a link: "Додати курс 'Рекурсія. Рекурсивні обчислення. Оптимізація алгоритмів' в обрані". On the right side, there is a navigation menu with the following items:

- Головна
- Правила роботи з системою
- Рекомендації щодо оформлення ел. уроку
- Обрані курси
- Відеотрансляція уроків
- Електронні підручники
- Робочі зошити
- Вебінари
- Чат
- Повідомлення
- Статистика
- Налаштування
- Користувачі
- Зворотній зв'язок
- Контакти

Below the navigation menu, there is a "Класи" (Classes) section with the following items:

- Завдання на карантин
- Розширення

Кожне заняття розпочинається з невеликого теоретичного блоку та розбору декількох задач. Майже усі уроки містять авторські відео реалізації алгоритмів. Деякі, окрім відео реалізації містять порівняння рекурсивного алгоритму та динамічного.

https://disted.edu.vn.ua/courses/learn/12370

Отримання знань  
дистанційна підтримка освіти школи

Факторіал числа. Факторіалом цілого невід'ємного числа  $n$  називається добуток всіх натуральних чисел від 1 до  $n$  і позначається  $n!$ . Якщо  $f(n) = n!$ , то мають місце рекурентні співвідношення:

$$n! = n * f(n - 1) \quad (1)$$

$$f(0) = 1 \quad (2)$$

Перша рівність описує крок рекурсії - метод обчислення  $f(n)$  через  $f(n - 1)$ . Друга рівність вказує, коли при обчисленні функції зупинитися. Якщо його не використовувати, то функція буде працювати нескінченно довго.

Наприклад, значення  $f(5)$  можна обчислити таким чином:

$$6! = 6 * f(5) = 6 * 5 * f(4) = 6 * 5 * 4 * f(3) = 6 * 5 * 4 * 3 * f(2) = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * f(1) = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 1 = 720$$

Очевидно, що при обчисленні  $f(n)$  слід зробити  $n$  рекурсивних викликів.

Ось можлива реалізація мовою C++:

Рекурсивний алгоритм зн...  
Переглянути планш...  
Поділитися

Подключение...

Навігація

- Головна
- Правила роботи в системі
- Рекомендації щодо оформлення ел. уроку
- Обрані курси
- Відеотрансляції уроків
- Електронні підручники
- Робочі зошити
- Вебінари
- Чат
- Подарунки
- Статистика
- Началгування
- Користувачі
- Зворотній зв'язок
- Контакти

Класи

- Зв'язання на карантин
- Дошколярки
- 1 клас
- 2 клас
- 3 клас
- 4 клас
- 5 клас
- 6 клас

В подальшому в посібник планується інтегрувати добірку завдань з теми. Отже, учень матиме змогу закріпити набуті навички на практиці. Okремо слід виділити урок оптимізації рекурсивних алгоритмів. Все подання матеріалу базується на розв'язанні однієї задачі. Урок гарно ілюстрований.



https://disted.edu.vn.ua/courses/ x Перевірка знань - Головна x +

https://disted.edu.vn.ua/courses/learn/12380

Приложения disted.edu.vn.ua test.edu.vn.ua Школа програми...

# Отримання знань

дистанційна підтримка освіти школярів

Особистий чат

Навігація


- Головна
- Правила роботи в системі
- Рекомендації щодо оформлення ел. уроку
- Обрані курси
- Відеотрансляція уроків
- Електронні підручники
- Робочі зошити
- Вебінари
- Чат
- Повідомлення
- Статистика
- Налаштування
- Користувачі
- Зворотній зв'язок
- Контакти

Класи

- Завдання на карантин
- Дошколяри
- 1 клас
- 2 клас
- 3 клас
- 4 клас
- 5 клас
- 6 клас

Даний урок варто присвятити саме методам оптимізації рекурсивних алгоритмів та спробувати оцінити їх складність.

Розглянемо задачу. Нехай маємо дорогу розмірами  $2 \times N$  та тротуарну плитку розміром  $1 \times 2$ , яку можна повертати, але неможливо розрізати на частини. Скількома способами можливо викласти цю дорогу плитками?



$N$  – довжина дороги  
Result – кількість варіантів

Яким же чином розв'язувати такі задачі. Очевидним є той факт, що в таких задачах матиме місце рекурентне співвідношення кількості варіантів від довжини дороги. Отже спробуємо розглянути варіант коли дорога має довжину 1.

Подключение...

https://disted.edu.vn.ua/courses/ x Перевірка знань - Головна x +

https://disted.edu.vn.ua/courses/learn/12380

Приложения disted.edu.vn.ua test.edu.vn.ua Школа програми...

Якщо ми продовжимо малювати різні варіанти, то можемо узагальнити наші дані в таблицю.

## Узагальнення міркувань

N	Res
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55

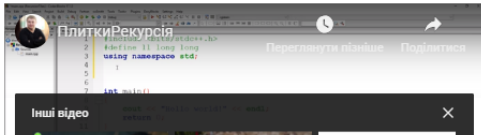
Який висновок можна зробити з даної таблиці. Ну по перше вже чітко видно співвідношення. А саме кількість різних варіантів залежить від  $F(1)$  та  $F(2)$ . Спробуємо узагальнити результат.

$$F(1) = 1;$$

$$F(2) = 2;$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2);$$

Програма реалізація рекурсивної функції матиме вигляд:



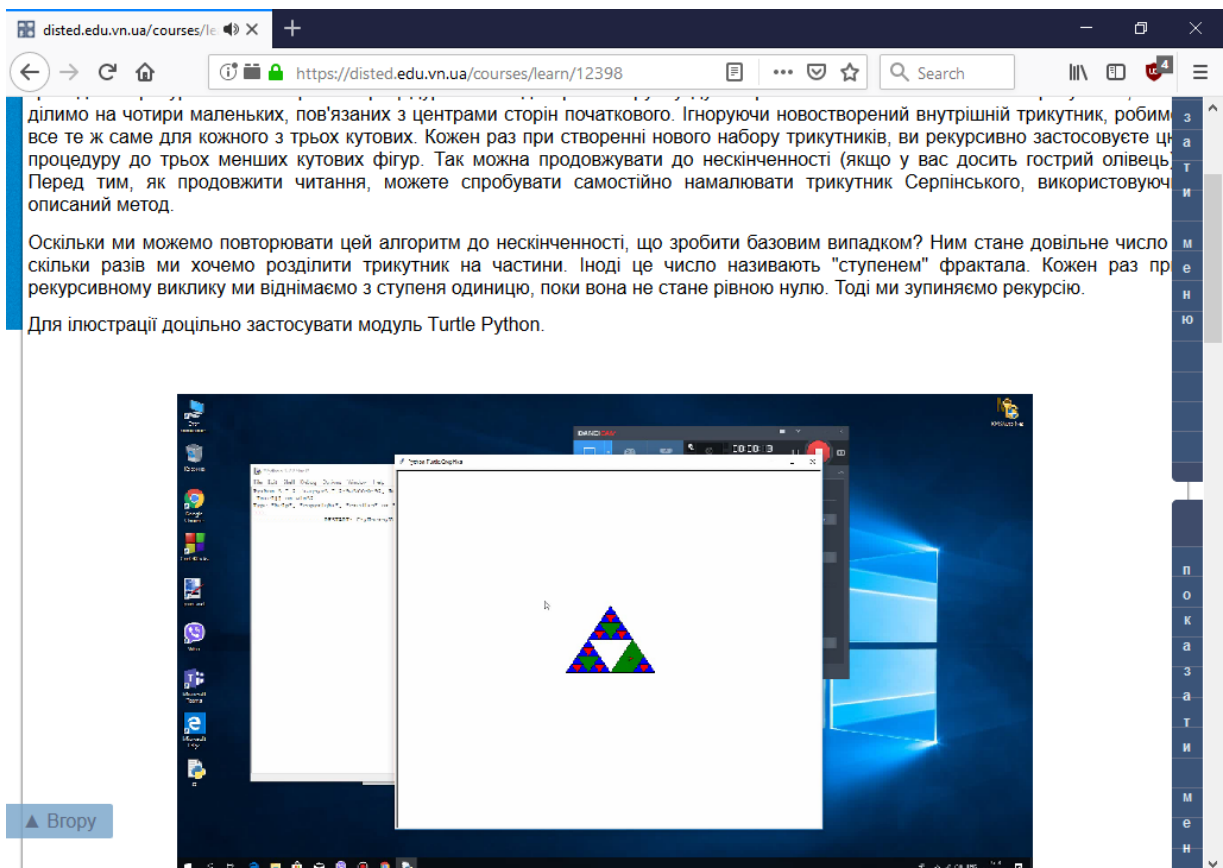
▲ Вгору

## МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАЛЬНОГО ПОСІБНИКА

Усі уроки курсу відповідають чинній програмі поглибленого вивчення інформатики у 10 класі та вивчення інформатики за академічним рівнем у 11 класах загальноосвітніх навчальних закладів.

- Усі завдання досить відомі та містять приклади авторських розв’язків від автора посібника.
- Інструкції подані у чіткій та зрозумілій формі.

Учням пропонуються уроки для самостійного опрацювання. Урок складається з теоретичної та практичної частин. Теоретична частина представлена у вигляді текстової інформації або мультимедійної презентації, яка висвітлює основні питання теми.



дїлимо на чотири маленьких, пов'язаних з центрами сторін початкового. Ігноруючи новостворений внутрішній трикутник, робим все те ж саме для кожного з трьох куткових. Кожен раз при створенні нового набору трикутників, ви рекурсивно застосовуєте цю процедуру до трьох менших куткових фігур. Так можна продовжувати до нескінченності (якщо у вас досить гострий олівець). Перед тим, як продовжити читання, можете спробувати самостійно намалювати трикутник Серпінського, використовуючи описаний метод.

Оскільки ми можемо повторювати цей алгоритм до нескінченності, що зробити базовим випадком? Ним стане довільне число скільки разів ми хочемо розділити трикутник на частини. Іноді це число називають "ступенем" фрактала. Кожен раз при рекурсивному виклику ми віднімаємо з ступеня одиницю, поки вона не стане рівною нулю. Тоді ми зупиняємо рекурсію.

Для ілюстрації доцільно застосувати модуль Turtle Python.

▲ Впроу

Практична частина представлена у вигляді реалізації основних алгоритмів мовою C++.

## ІНСТРУК ІЯ ДЛ Я КОРИСТУВАЧА ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАЛЬНОГО ПОСІБНИКА

Щоб мати можливість працювати з курсом, потрібно зайти на сайт <http://disted.edu.vn.ua/> та зареєструватись або натиснути «Доступ без реєстрації».



Після реєстрації обираємо клас та курс:

Класи	
с	Завдання на карантин
х	Дошколарик
в	1 клас
а	2 клас
т	3 клас
и	4 клас
м	5 клас
е	6 клас
н	7 клас
ю	8 клас
	9 клас
	<b>10 клас</b>
	11 клас
	ЗНО
	Повторення

Далі заходимо у відповідний курс.

10 клас

**ІНФОРМАТИКА**

- [Інформатика, поглиблене вивчення](#) (Пасіхов Юрій Якович)
- [Спецкурс з інформатики](#) (Порхун Алла Олексіївна)
- [Інформатика - 10 клас \(2018-2019 н.р.\)](#) (Підлужняк Наталія Григорівна)
- [Інформатика, поглиблене вивчення](#) (Непомнящий Григорій Ісаакович)
- [Інформатика \(1 год на тиждень\)](#) (Діденко Володимир Сергійович)
- [Інформатика \(рівень стандарту\)](#) (Тарасович Дарія Петрівна)
- [Інформатика. Академічний рівень](#) (Свята Тетяна Володимирівна)
- [Інформатика 10 клас \(доповнення від Алли Олексіївни\)](#) (Порхун Алла Олексіївна)
- [Інформатика 10 клас \(2015-2016 н.р.\)](#) (Мосендз Олександр Григорович)
- [Інформатика \(2017-2018\) задачі для лз](#) (Ветров Віталій Вікторович)
- [Рекурсія. Рекурсивні обчислення. Оптимізація алгоритмів](#) (Ветров Віталій Вікторович)

Для повної комфортної роботи раджу пройти реєстрацію на сайті та заходити під власним логіном та паролем.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Елементи математичної логіки та теорії рекурсії : навч. посіб. / М. Комарницький, В. Андрійчук , І. Мельник. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 282 с.
2. Анісімов А.В. Інформатика. Творчість. Рекурсія / А.В. Анісімов. – Київ: Наукова думка, 1989. – 220 с.
3. Стекольникова Н.В. Хроника лексические парадигмы в текстах рекурсивной структуры (на материале русских сказок) / Н.В. Стекольникова // Вестник ВГУ. – 2008. – № 3. – с. 344–347.
4. Эффект Дросте [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/>